Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lucien Godeaux

Sur une configuration formée par trois suites de Laplace

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.4, p. 453–455.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_4_453_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Geometria. — *Sur une configuration formée par trois suites de Laplace.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

RIASSUNTO. – Costruzione di tre successioni di Laplace di cui l'una è inscritta nelle due altre e queste sono inscritte nella prima.

1. – Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les points U, V qui représentent les tangentes asymptotiques xx_u, xx_v sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 se correspondent dans une transformation de Laplace (Bompiani, Tzitzeica). Soit

$$(L) \qquad \cdots, U^n, \cdots, U^1, U, V, V^1, \cdots, V^n, \cdots$$

la suite de Laplace à laquelle appartiennent U, V, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Rappelons (1) que la suite de Laplace est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q et que les points U^1, V^1 ne peuvent appartenir à Q. Les plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Φ_n. On a ainsi une suite de quadriques Φ, $\Phi_1, \cdots, \Phi_n, \cdots$ dont la première est la quadrique de Lie, deux quadriques consécutives se touchant en quatre points.

2. – Supposons que seul le point U^n $(n > 1)$ en dehors des points U, V appartienne à Q, la suite L étant supposée illimitée dans les deux sens.

Les plans $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ et $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ sont distincts car autrement ils appartiendraient à Q et leurs points appartiendraient également à Q contrairement à l'hypothèse.

Le plan $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ coupe Q suivant deux droites r_1, r_2 qui représentent deux faisceaux de rayons (R_1, ρ_1) et (R_2, ρ_2) dont les sommets appartiennent à la droite r représentée par le point U^n.

La quadrique Φ_{n-1} dégénère en tant que quadrique–lieu dans le couple de plans ρ_1, ρ_2 et en tant que quadrique–enveloppe dans les gerbes de sommets R_1, R_2. Dans ces conditions, la section de Q par le plan $Y^{n-1} Y^n Y^{n+1}$ doit dégénérer en deux droites représentant les faisceaux de rayons (R_1, ρ_2) et (R_2, ρ_1).

(*) Nella seduta del 17 aprile 1971.

(1) Nous avons exposé nos recherches sur cet objet dans *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires de l'Academie roy. de Belgique, 1964, t. XXXIV).

Désignons par X , X′ les points de recontre de la droite $Y^{n-1}Y^n$ avec Q et par Y , Y′ ceux de la droite Y^nY^{n+1}. Les droites projetant ces points du point U^n appartiennent à Q. Nous supposerons que la section de Q par le plan $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ est formée des droites XY et X′ Y′. Nous supposerons pour fixer les idées que la droite XY représente le faisceau de rayons (R_1, ρ_2) et la droite X′Y′ le faisceau (R_2, ρ_1).

Le point U^n est situé à l'intersection des droites XY et X′Y′, il appartient donc au plan $V^{n-1}V^nV^{n+1}$, puisque la droite r est commune aux plans ρ_1, ρ_2.

3. – Le point U^n appartenant au plan $V^{n-1}V^nV^{n+1}$, le point U^{n-1} appartient au plan $V^nV^{n+1}V^{n+2}$. On peut le voir par un raisonnement simple.

La droite $V^{n+1}U^n$ rencontre la droite $V^{n-1}V^n$ en un point A. Faisons varier v. A la droite $V^{n+1}U^n$ correspond la droite $V^{n+2}U^{n-1}$ et la droite AA_v doit s'appuyer sur cette droite. D'autre part, elle doit s'appuyer sur la droite V^nV^{n+1}. Désignons par A^1 le point de rencontre des droites AA_v et $V^{n+1}V^{n+2}$.

Faisons maintenant varier u. A la droite $V^{n+2}U^{n-1}$ correspond la droite $V^{n+1}U^n$ et au point A^1 nécessairement le point A. Il en résulte que les points A , A^1 sont transformés de Laplace l'un de l'autre et que A^1 appartient à la droite $V^{n+1}V^{n+2}$. Le point U^{n-1} appartient donc au plan $V^nV^{n+1}V^{n+2}$.

On démontrerait de même que le points U^{n+1} appartient au plan $V^nV^{n-1}V^{n-2}$.

D'une manière générale, on voit que les points $U^{n-2}, U^{n-3}, \cdots, U^{n-i}, \cdots$, appartiennent respectivement aux plans $V^{n+1}V^{n+2}V^{n+3}$, $V^{n+2}V^{n+3}V^{n+4}, \cdots, \cdots, V^{n+i-1}V^{n+i}V^{n+i+1}, \cdots$. De même, le point U^{n+i} appartient au plan $V^{n-i}V^{n-i+1}V^{n-i+2}$, à condition de remplacer V^{-k} par U^{k-1} si $k > 0$.

Appelons ligne brisée L_1 de Laplace le polygone formé par les segments de droites joignant deux points consécutifs de la suite L et polyèdre de Laplace L_2 à faces triangulaires l'ensemble des plans déterminés par trois points consécutifs de la suite L. On voit que: La ligne brisée L_1 est inscrite dans le polyèdre L_2.

4. – Considérons la droite XY qui représente le faisceau de rayons (R_1, ρ_2) et rencontre en X la droite $V^{n-1}V^n$ et en Y la droite V^nV^{n+1}. Elle passe de plus par U^n.

Faisons varier u. Au point X correspond un point de la droite XX_u qui rencontre la droite $V^{n-1}V^{n-2}$ et au point Y, un point de la droite YY_u qui rencontre la droite V^nV^{n-1}. A la droite XY correspond une droite passant par le point U^{n+1}. Comme ce point se trouve dans le plan $V^{n-2}V^{n-1}V^n$ de même que la droite XX_u, la droite qui correspond à XY est située dans ce plan. La droite YY_u se trouve dans le plan tangent en Y à la surface (Y) et ce plan contient la droite XY. On en conclut que le point X est le transformé de Laplace de Y dans le sens des u.

On établit de même que le point Y est le transformé de Laplace de X dans le sens des v.

Les points X, Y étant transformés de Laplace l'un de l'autre, appartiennent à une suite de Laplace

$$(M) \qquad \ldots, X^n, \ldots, X^1, X, Y, Y^1, \ldots, Y^n, \ldots$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v. Cette suite est inscrite dans la suite L, le point X^k appartenant à la droite $V^k V^{n-k}$ et le point Y^k à la droite $V^{n-k} V^{n-k-1}$, à condition de remplacer V^{n-k} par U^{k-n-1} si $k > n$.

En partant des points X', Y', on obtiendrait de même une suite de Laplace M' inscrite dans la suite L.

Observons que la droite XX_u rencontre la droite $V^{n-1} V^{n-2}$ au point X^1 et que la droite XX^1 passe par U^{n+1}. De même, le point U^{n-1} appartient à la droite YY^1. La suite de Laplace L est donc inscrite dans la suite M et de même dans la suite M'.

Les suites M, M' *sont inscrites dans la suite* L *et celle-ci est à son tour inscrite dans chacune des suites* M, M'.

5. – La droite XY représente le faisceau des tangentes au point R_1 à la surface (R_1). D'une manière précise, si au lieu de R_1 nous écrivons R^1, le point X représente la tangente $R^1 R^1_v$ et le point Y la tangente $R^1 R^1_u$.

Les quadriques Φ_{n-2}, Φ_n se touchent au point R^1, le plan tangent commun étant ρ_2. Elle se touchent de même au point $R^2 = R_2$.

La suite de Laplace M est l'analogue de la suite L, mais attachée au point R^1 à la surface (R^1).

Remarquons que le point X^k appartient à la droite $U^{n-k} U^{n-k-1}$, par conséquent le point X^n appartient à la droite UV et par suite à l'hyperquadrique Q comme le point U^n. Il y a donc une parfaite analogie entre la suite L et la suite M, et de même avec la suite M'.

La suite M est comme la suite L autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Il en résulte que le plan $Y^{n-1} Y^n Y^{n+1}$ coupe Q suivant deux droites qui jouent un rôle analogue à celui des droites XY et $X' Y'$. Il existe donc une suite de Laplace N inscrite et circonscrite à la suite M. Et ainsi de suite.