Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Mario Girardi

## Il teorema $D_9$

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **50** (1971), n.4, p. 448–452.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_4_448_0>

**Geometria.** — *Il teorema* $D_9$ (*). Nota di MARIO GIRARDI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper the graphic planes where theorem $D_9$ holds are considered. $D_9$ is a special case of Desargues' theorem, occurring when two vertices of one of the homological triangles belong to a side of the other triangle. The main achievement is a unified proof of theorems by Moufang and Gleason; moreover, several characterizations of $D_9$ are given and some algebraic properties of ternary rings are deduced.

## 1. INTRODUZIONE

In questa Nota vengono esposte alcune proprietà di quei piani grafici in cui si suppone verificato il teorema di Desargues limitatamente alle coppie di triangoli omologici tali che due vertici di uno dei triangoli appartengano ciascuno ad un lato dell'altro.

Si indicherà con $D_9$ il suddetto caso particolare del teorema di Desargues (cfr. Skorniakov [9]), e, seguendo la terminologia introdotta da L. Lombardo Radice (cfr. [5]), si dirà che nei piani in questione è «universale» $D_9$; si dirà invece che $D_9$ è verificato rispetto ad una fissata retta $l$ qualora, oltre alle precedenti condizioni, si imponga che uno dei due trangoli omologici abbia un lato appartenente alla retta $l$.

È noto che i piani in cui è «universale» $D_9$ sono localmente Desarguesiani (cioè ogni 4–punto genera un sub–piano desarguesiano, in quanto, in particolare, in essi è valido il teorema $D_8$; cfr. L. Lombardo Radice [5], M. Girardi [3], D. C. De Maria [1]).

Nel presente lavoro vengono date anzitutto talune caratterizzazioni – nel caso di un piano affine – del teorema $D_9$, stabilendone tra l'altro (teor. I) l'equivalenza con il teorema del quadrangolo piano completo: il che estende al caso affine risultati già noti (cfr. Moufang [6], Pickert [7] p. 190) nel caso proiettivo. Ciò, oltre a mettere in luce la natura essenzialmente affine della suddetta equivalenza, consente di stabilire alcune proprietà degli anelli ternari associati ai piani in questione (per la nozione di anello ternario, cfr. M. Hall [4], B. Segre [8]).

In base a tali proprietà si ottiene una nuova dimostrazione del risultato che un piano finito in cui sia «universale» $D_9$ risulta desarguesiano, senza dover trattare separatamente il caso della caratteristica 2 (cfr. Pickert [7], Gleason [2]).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività promosse dal Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 20 febbraio 1971.

## 2. IL TEOREMA $D_9$ ED IL TEOREMA DEL QUADRANGOLO PIANO COMPLETO

Supponiamo che $D_9$ valga in un dato piano grafico $\pi$ rispetto ad una fissata retta $l \in \pi$: si dirà, in tal caso, che il piano affine $\pi^l$ (cioè il piano affine ottenuto da $\pi$ privandolo della retta $l$) verifica il caso affine di $D_9$.

D'altra parte, si dirà che il piano affine $\pi^l$ verifica il caso affine del teorema del quadrangolo piano completo, qualora il suddetto teorema sia verificato limitatamente alle coppie di quadrangoli che abbiano i lati opposti paralleli (incidenti in $l$).

In questo paragrafo si dimostra il seguente:

TEOREMA I. – *In un piano affine* $\pi^l$, *nel quale sia valido il caso affine di* $D_9$, *è sempre verificato il caso affine del teorema del quadrangolo piano completo; e viceversa.*

La dimostrazione si ottiene mediante i seguenti tre lemmi, ognuno dei quali costituisce una caratterizzazione del caso affine di $D_9$.

LEMMA I. – *Un piano affine* $\pi^l$ *verifica il caso affine del teorema* $D_9$ *se, e soltanto se, dato comunque un riferimento* $\omega, \nu, \eta, \xi$ *in* $\pi^l$ *ed un punto* $P = (x, x)$ *appartenente alla retta* $\omega\nu$, *risulta che la retta* $[(x, 0) \cup (0, x)]$ *è parallela alla retta* $[(1, 0) \cup (0, 1)]$.

*Dimostrazione.* – La condizione è sufficiente; siano ABC e $A' B' C'$ due triangoli omologici che si trovino nelle ipotesi di $D_9$ (si può cioè supporre che il punto $B'$ appartenga alla retta AC ed il punto $C'$ alla retta AB) e tali che uno dei due (ad esempio $A' B' C'$) abbia un lato (ad esempio $B' C'$) appartenente alla retta $l$. Si assuma il riferimento $\omega = A$, $\nu = BB' \cup CC'$, $\eta = C'$, $\xi = B'$; il punto $A'$ risulterà allora un punto $(x, x)$ della retta $\omega\nu$. È immediato constatare che il teorema di Desargues per i triangoli in questione è proprio espresso dal parallelismo delle rette $[(x, 0) \cup (0, x)]$ e $[(1, 0) \cup (0, 1)]$.

La condizione è necessaria; infatti, dato comunque un riferimento $\omega, \nu, \eta, \xi$ in $\pi^l$ ed un punto $P = (x, x)$ sulla retta $\omega\nu$, si considerino i due triangoli $A = \omega$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$ e $A' = P = (x, x)$, $B' = \xi$, $C' = \xi$; è allora chiaro che il teorema di Desargues per i triangoli in questione esprime il parallelismo della retta $[(x, 0) \cup (0, x)]$ con la $[(1, 0) \cup (0, 1)]$.

LEMMA II. – *Se un piano affine* $\pi^l$ *verifica il caso affine di* $D_9$, *allora, dato comunque un riferimento ed un punto* $P(x, y)$ *in* $\pi^l$, *la retta* $[(x, y) \cup (y, x)]$ *è sempre parallela alla retta* $[(1, 0) \cup (0, 1)]$.

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo lemma si ottiene considerando il riferimento $\omega' = (x, x)$, $\nu' = (y, y)$, $\eta' = \eta$, $\xi' = \xi$, ed applicando il lemma I al punto che appartiene alla retta.

LEMMA III. – *Sia* $\pi^l$ *un piano affine che verifica il caso affine del teorema* $D_9$ *ed* $\omega, \nu, \eta, \xi$ *un qualunque riferimento in* $\pi^l$. *Allora, dato comunque un quadrangolo con i lati paralleli agli assi ed una diagonale parallela alla retta* $\omega\nu$ *l'altra diagonale risulta parallela alla retta* $[(1, 0) \cup (0, 1)]$.

La dimostrazione procede attraverso tre punti principali. Innanzitutto, dato un quadrangolo $P_1 = (x, y)$, $P_2 = (z, y)$, $P_3$, $P_4$, con i lati paralleli agli assi e tale che la retta $P_2 P_4$ sia parallela alla $\omega\nu$, si considera il riferimento $\omega' = P_2$, $\nu' = P_1P_4 \cap [(y, y) \cup \eta]$, $\eta' = \eta$, $\xi' = \xi$.

Applicando il lemma I al punto $P_4$, si ottiene che la retta $P_1P_3$ è parallela alla retta $[(y, y) \cup \Gamma]$, ove si è posto $\Gamma = P_2\eta \cap \nu' \xi$.

Si considera poi il riferimento $\omega'' = (z, z)$, $\nu'' = (y, y)$, $\eta'' = \eta$, $\xi'' = \xi$; poiché i punti $P_2$, $\nu'$, $\Gamma$, $(y, z)$ appartengono al sub–piano generato da $\omega''$, $\nu''$, $\eta''$, $\xi''$, ricordando che tale sub–piano è desarguesiano (1), si ha che la retta $[(y, y) \cup \Gamma]$ è parallela alla retta $[(y, z) \cup (z, y)]$.

Si ottiene infine facilmente la conclusione dal lemma II.

Stabilito il lemma III, la parte diretta del teorema I è di immediata dimostrazione, non appena si fissi il riferimento a partire da uno dei due quadrangoli di cui all'enunciato del teorema del quadrangolo piano completo.

Il viceversa si ottiene poi dal lemma I, considerando i due quadrangoli $\omega, \nu, (1, 0), (0, 1)$ e $\omega, (a, a), (0, a), (a, 0)$.

Concludiamo questo paragrafo osservando che il teorema I implica l'equivalenza proiettiva (cfr. Pickert [7], p. 190) del teorema $D_9$ e del teorema del quadrangolo piano completo.

## 3. L'ANELLO TERNARIO NEI PIANI NEI QUALI È VERIFICATO $D_9$

Nel presente paragrafo si studia la struttura degli anelli ternari associati ad un piano grafico, nel quale sia verificato $D_9$ rispetto ad una fissata retta $l$ (si utilizza la nozione di anello ternario, così com'è introdotta in B. Segre [8]). Si ottiene al riguardo il seguente

TEOREMA II. – *In un piano grafico nel quale sia verificato* $D_9$ *rispetto ad una retta* $l$, *scelto comunque un riferimento che abbia due punti sulla retta* $l$ (*cioè un riferimento in* $\pi^l$), *le coordinate formano rispetto alla addizione* $a + b = T(1, a, b)$ *un gruppo abeliano, nel quale ogni elemento ha periodo* $p$ (*$p$–primo*), *oppure tutti gli elementi hanno periodo infinito.*

COROLLARIO. – *L'ordine del piano, nel caso finito, è una potenza di un numero primo* $p$ (segue immediatamente dal fatto che tale è l'ordine del gruppo abeliano elementare in cui ogni elemento è di ordine $p$).

*Dimostrazione.* – Poiché è noto che nell'anello ternario $K_T$ associato ad un qualunque riferimento ogni elemento ammette un'unico opposto a destra (ed a sinistra), ed esiste un'unico elemento neutro additivo (cfr. B. Segre [8]),

(1) Si noti che a partire dal lemma I e dal lemma II si stabilisce facilmente che il « reticolato intero » (cfr. [1], p. 125) costruito a partire da un riferimento affine di $\pi^l$ è sempre normale. Tale proprietà è sufficiente, anche nel caso affine, per ottenere che il sub–piano generato dal riferimento considerato è desarguesiano (cfr. [1], p. 127).

per dimostrare il teorema II è sufficiente dimostrare i tre punti seguenti:

*a*) l'addizione è sempre commutativa, *b*) essa è sempre associativa, *c*) ogni elemento ha lo stesso periodo in un fissato riferimento. Ora infatti:

*a*) Posto $E = \eta\xi \cap [(1, 0) \cup (0, 1)]$, dati comunque due elementi $a$, $b \in K_T$ si hanno i seguenti allineamenti

$(a, b), (b, a), E,$ per il lemma II del paragrafo 2;
$(o, a + b), (a, b), E,$ per il lemma III del paragrafo 2;
$(o, b + a), (b, a), E,$ per il lemma III del paragrafo 2;

è quindi immediato che: $a + b = b + a$.

*b*) Sfruttando la commutatività già stabilita ed il teorema I, dati comunque $a, b, k$ elementi di $K_T$, si hanno i seguenti allineamenti:

$(a, b+k), (k, a+b), E$ (dal quadrangolo: $(k, b+k), (a, a+b), \xi, \eta$);
$(a, b+k), (o, a+(b+k)), E$ (dal quadrangolo: $(a, a+(b+k)), (o, b+k), \xi, \eta$);
$(k, a+b); (o, (a+b)+k), E$ (dal quadrangolo: $(k, k+(a+b)), (o, a+b), \xi, \eta$).

Se ne deduce allora facilmente la proprietà associativa:

$$a + (b + k) = (a + b) + k .$$

*c*) Cominceremo col provare che, posto $n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-volte}}$, per ogni $a \in K_T$ si ha $T(n, a, o) = n \circ a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{-volte}}$.

Si proceda per induzione. Ora è $a \circ 1 = 1 \circ a = a$ in ogni anello ternario, e $T(2, a, 0) = 2 \circ a = a + a$ (come si vede subito assumendo il riferimento $\omega' = \omega$, $\nu' = (1, 2)$, $\eta' = \eta$, $\xi' = \eta\xi \cap \omega\nu$, ed applicando il lemma I al punto $(a, 2 \circ a)$). Si costruisca allora il punto $(a, n \circ a)$: la parallela alla retta $\omega\nu$ passante per $(a, n \circ a)$ avrà l'equazione $y = T(1, x, k) = x + k$, dove $k$ dovrà verificare la $n \circ a = a + k$, da cui, poiché siamo in un gruppo abeliano, si ha $k = n \circ a - a$. Se allora si considera il riferimento $\omega' = \omega$, $\nu' = (1, n)$, $\eta' = \eta$, $\xi' = \eta\xi \cap \omega\nu$, il lemma I ci assicura che la retta $[(0, n \circ a - a) \cup (a, a)]$ è parallela alla $[(1, 1) \cup (0, n - 1)]$. Esaminando allora i due quadrangoli $(0, 1), (1, 1), (1, n - 1), (0, n - 1)$ e $(0, a), (a, a), (a, n \circ a - a)$, $(0, n \circ a - a)$, il lemma III ci assicura il parallelismo della retta $[(0, 1) \cup \cup (1, n - 1)]$ con la $[(0, a) \cup (a, n \circ a - a)]$. A questo punto è facile calcolare il coefficiente angolare della retta $[(0, 1) \cup (n - 1)]$ basta a tal uopo porsi nel sub-piano desarguesiano generato da $\omega\nu\eta\xi$, per trovare che la retta per l'origine parallela alla suddetta interseca la retta $x = 1$ nel punto $(1, n - 2)$. Si ottiene dunque che la retta $[(0, a) \cup (a, n \circ a - a)]$ ha coefficiente angolare pari ad $n - 2$. Sfruttando ora l'ipotesi induttiva, si vede che la retta per l'origine di coefficiente angolare $n - 2$ interseca la retta $x = a$ nel punto di coordinata $y = (n - 2) \circ a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-2 \text{ volte}}$. Poniamoci quindi nel sub-piano generato da $\omega, (a, a), \eta, \xi$. Poiché tale sub-piano è desarguesiano, la retta per $(0, a)$ di coefficiente angolare $n - 2$ intersecherà la retta $x = a$ proprio nel punto $(a, (\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-1 \text{ volte}}))$; ne segue che:

$$n \circ a - a = (\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-1 \text{ volte}}),$$

donde l'asserto.

Si ottiene infine la dimostrazione del punto $c$), tenendo presente che, se l'unità di $K_T$ ha periodo finito $p$ ($p$–primo), si ha $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{p\text{–volte}} = p \circ \circ a = 0 \circ a = 0$; se invece l'unità ha periodo infinito, allora $n$ è sempre diversa da zero e quindi $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{–volte}} = n \circ a$ sarà sempre diverso da zero (si ricordi che $K_T$ è privo di divisori dello zero).

Resta così compiutamente stabilito il teorema II.

## 4. Conclusioni

Ricordando un noto teorema di Gleason (cfr. B. Segre [8]), che può essere enunciato nel modo seguente « Se in un piano grafico l'addizione è associativa per ogni scelta del riferimento e l'ordine del piano è potenza di un numero primo $p$, allora il piano è desarguesiano », i risultati dianzi ottenuti permettono di stabilire immediatamente il seguente teorema (cfr. Pickert [7], p. 193):

TEOREMA III. – *Ogni piano finito in cui è « universale »* $D_9$ *risulta desarguesiano.*

D'altra parte è noto, in particolare, che un piano a caratteristica 2 verifica il teorema del quadrangolo piano completo. Ne discende il

TEOREMA IV. – *Ogni piano finito a caratteristica 2 è desarguesiano* (cfr. Gleason [2]).

Tenendo infine presente che il teorema $D_9$ è generato da un 5–punto (cfr. L. Lombardo Radice [5], Skorniakov [9]), si ha anche la seguente caratterizzazione dei piani fini desarguesiani.

TEOREMA V. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché un piano finito sia desarguesiano, è che ogni sub–piano 5–generato risulti desarguesiano.*

## Bibliografia


[1] D. C. De Maria, *Sui piani grafici esagonali*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. di Torino », *22* (1962–63), 115–158.
[2] A. M. Gleason, *Finite Fano Planes*, « Amer. Jour. of Math. », *78* (1956), 797–807.
[3] M. Girardi, *Un'osservazione sul teorema* $D_8$, « Rend. Mat. », (6), *4* (1971), fasc. 1 (gennaio–marzo).
[4] M. Hall, *Projective planes*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *54* (1953), 229–277.
[5] L. Lombardo Radice, *Su alcuni caratteri dei piani grafici*, « Rend. Sem. Mat. Università di Padova », *24* (1955), 312–345.
[6] R. Moufang, *Alternative Körper und der Satz vom vollständingen Vierseit*, « Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg », *9* (1933) 207–222.
[7] Pickert G., *Projective Ebenen*, Springer Berlin 1955.
[8] B. Segre, *Lectures on modern Geometry* with an Appendix by L. Lombardo Radice, Ed. Cremonese 1961.
[9] Skorniakov L. A., *La configurazione* $D_9$, « Mat. Sbornik », n. s. *30* (72), 73–78 (1952).