Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Stefania Paganoni Marzegalli

# Teoremi di unicità per l'equazione funzionale $f[F(x, y)] = H[f(x), f(y); x, y]$ negli spazi metrici

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **50** (1971), n.4, p. 438–443.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_4_438_0>

**Analisi funzionale.** — *Teoremi di unicità per l'equazione funzionale* $f[F(x, y)] = H[f(x), f(y); x, y]$ *negli spazi metrici.* Nota di STEFANIA PAGANONI MARZEGALLI, presentata (*) dal Corrisp. G. RICCI.

SUMMARY. — In this paper some conditions are given for the solution of uniqueness problem for the functional equation $f[F(x,y)] = H[f(x), f(y); x, y]$ when $x, y$ belong to a metric space E. If $f_1$ and $f_2$ are identical on some E–neighbourhood U of a point $a \in E$, they are shown to be identical on the entire domain E. Further conditions are given for the solution of the uniqueness problem.

INTRODUZIONE. – J. Aczél e C. T. Ng hanno affrontato il problema dell'unicità della soluzione $f(x)$ dell'equazione funzionale

$$(*) \qquad f[F(x, y)] = H[f(x), f(y); x, y].$$

Aczél [1] ha dimostrato l'unicità della soluzione nel caso in cui $f$ e F siano funzioni delle variabili reali $x, y$ ponendo come ipotesi una certa iniettività di H e una ipotesi sopra F detta « internalità ». Successivamente C. T. Ng [2], estendendo la nozione di internalità (sempre in senso rettilineo) agli spazi vettoriali, ha ottenuto, sotto opportune ipotesi, l'unicità della soluzione negli spazi vettoriali topologici.

Lo scopo della presente Nota è quello di fornire condizioni, ancora sopra F e H, sufficienti a garantire l'unicità della soluzione $f(x)$ dell'equazione funzionale (*) allorché lo spazio sia metrico, ma d'altronde sostituendo alla internalità rettilinea di Aczél–Ng delle ipotesi molto più generali che si configurano come « attrattività » (rispetto ad un punto).

1. – Siano N e E due insiemi; nell'equazione funzionale (*) sia:

$$F : E \times E \to E \quad , \quad f : E \to N \quad , \quad H : N \times N \times E \times E \to N.$$

Sia $E = (E, d)$ uno spazio metrico e, $\forall x, y \in E$, si indichi con $d(x, y)$ la distanza fra $x$ e $y$.

Sia $a \in E$; si dice che $F(x, a)$ è *attrattiva in a*, *fortemente attrattiva in a*, *non repulsiva in a* se, rispettivamente, sono verificate le seguenti condizioni:

$$\forall x \in E - \{a\} \quad , \quad d(F(x, a), a) < d(x, a);$$

$$\forall x \in E - \{a\} \quad , \quad d(F(x, a), a) \leq \lambda d(x, a) \text{ con } \lambda \in (0, 1);$$

$$\forall x \in E - \{a\} \quad , \quad d(F(x, a), a) \leq d(x, a).$$

Sia $x \in E - \{a\}$; qui e nel seguito si indicherà con $\{x_n(a)\}$ la successione così costruita:

$$x_0(a) = x \quad , \quad x_n(a) = F(x_{n-1}(a), a) \qquad n = 1, 2, 3 \cdots.$$

(*) Nella seduta del 17 aprile 1971.

TEOREMA I. – *Sia* E *uno spazio metrico compatto ed* N *un insieme; si consideri l'equazione funzionale* (*) *e siano* $f_1$ *e* $f_2$ *due soluzioni di tale equazione. Siano soddisfatte le seguenti ipotesi*:

i) $\exists a \in \mathrm{E}$, *tale che* $\mathrm{F}(x, a)$ *sia continua rispetto ad* $x$ *ed attrattiva in* $a$;

ii) $\exists \xi \in \mathrm{N}$, *tale che*, $\forall x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{H}(u, \xi; x, a)$ *sia iniettiva rispetto a* $u$ (*cioè*: $\mathrm{H}(u_1, \xi; x, a) = \mathrm{H}(u_2, \xi; x, a) \Rightarrow u_1 = u_2$) (1).

iii) $\exists$ *un intorno* $\mathrm{U}(a)$ *del punto* $a$ *tale che*, $\forall x \in \mathrm{U}(a)$, $f_1(x) = f_2(x)$ *e inoltre* $f_1(a) = f_2(a) = \xi$.

*Allora* $f_1$ *e* $f_2$ *coincidono su tutto* E.

*Dimostrazione*. Sia $x \in \mathrm{E} - \{a\}$, si consideri la successione $\{x_n(a)\}$. Si può subito dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} x_n(a) = a$. Infatti si osservi che, essendo $\mathrm{F}(x, a)$ attrattiva in $a$, la successione $\{\rho_n\}$, con $\rho_n = d(x_n(a), a)$, è monotona decrescente e quindi $\lim_{n \to +\infty} \rho_n = \bar{\rho} \geq 0$. Se fosse $\bar{\rho} > 0$, per la compattezza di E, esisterebbe una successione parziale $\{x_{n_k}(a)\}$ convergente ad un punto $x^* \in \mathrm{E}$, e si avrebbe $d(x^*, a) = \bar{\rho}$. Dalla continuità di $\mathrm{F}(x, a)$ seguirebbe allora:

$$x_1^* = \mathrm{F}(x^*, a) = \mathrm{F}(\lim_{k \to +\infty} x_{n_k}(a), a) = \lim_{k \to +\infty} \mathrm{F}(x_{n_k}(a), a) = \lim_{k \to +\infty} x_{n_k+1}(a),$$

e per l'attrattività di $\mathrm{F}(x, a)$ si avrebbe $d(x_1^*, a) < d(x^*, a) = \bar{\rho}$. Ma questo è assurdo perché $d(x_{n_k+1}(a), a) \geq \bar{\rho}$. Pertanto $\bar{\rho} = 0$ e quindi $x_n(a) \to a$ per $n \to +\infty$. Sia $v$ il minimo indice per il quale $x_v(a) \in \mathrm{U}(a)$; per l'ipotesi iii) si ha $f_1(x_v(a)) = f_2(x_v(a))$. Dalla equazione funzionale (*) segue:

$$\mathrm{H}(f_1(x_{v-1}(a)), f_1(a), x_{v-1}(a), a) = f_1(x_v(a)) = f_2(x_v(a)) =$$
$$= \mathrm{H}(f_2(x_{v-1}(a)), f_2(a), x_{v-1}(a), a).$$

Dalle ipotesi ii) e iii) segue allora: $f_1(x_{v-1}(a)) = f_2(x_{v-1}(a))$. Iterando il procedimento si giunge a concludere $f_1(x) = f_2(x)$. Essendo $x \in \mathrm{E} - \{a\}$ del tutto arbitrario resta così dimostrata l'uguaglianza di $f_1$ e $f_2$ su tutto E.

*Osservazione I*. – Il Teorema I continua a valere se all'ipotesi i) si sostituisce la seguente:

$\mathrm{i}_1$) $\exists a \in \mathrm{E}$, tale che $\mathrm{F}(x, a)$ sia fortemente attrattiva in $a$.

In questo caso infatti risulta $\rho_n \leq \lambda^n \rho_0$ e quindi $\rho_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Si osservi che l'ipotesi $\mathrm{i}_1$) rende superflua la richiesta che lo spazio metrico sia compatto e che $\mathrm{F}(x, a)$ sia continua rispetto ad $x$.

(1) Si osservi che il Teorema I continua a sussistere se, nella condizione ii) si richiede l'iniettività di $\mathrm{H}(u, \xi; x, a)$, $\forall x \in \mathrm{E} - \mathrm{U}(a)$, essendo $\mathrm{U}(a)$ l'intorno di cui al punto iii).

*Osservazione* 2. – Il Teorema 1 continua a valere se all'ipotesi i) si sostituisce il complesso delle due seguenti:

$i_1'$) $\exists a \in E$, tale che $F(x, a)$ sia continua rispetto ad $x$.

$i_2'$) $\exists k > 1$, $k$ intero, tale che la trasformazione $F^k(x, a)$, iterata $k$-esima di $F(x, a)$, sia attrattiva in $a$.

Infatti in questo caso dalla successione $\{\rho_n\}$ si possono estrarre $k$ successioni parziali $\{\rho_{l+kn}\}$, $(l = 1, 2, \cdots k)$, le quali risultano monotone decrescenti; perciò $\lim_{n\to+\infty} \rho_{l+nk} = \bar{\rho} \geq 0$. Se fosse $\bar{\rho}_l > 0$, dalla successione $\{x_{l+nk}(a)\}$ si potrebbe estrarre una sottosuccessione $\{x_{l+kn_r}(a)\}$ convergente ad un punto $\bar{x}_l \in E$. Ma per questo punto si avrebbe:

$$\bar{x}_l^k = F^k(\bar{x}_l, a) = \lim_{r\to+\infty} \{x_{l+k(n_r+1)}(a)\}$$

e inoltre $d(\bar{x}_l^k, a) < d(\bar{x}_l, a) = \bar{\rho}_l$. Ma questo è assurdo poiché $d(x_{l+k(n_r+1)}(a), a) \geq \bar{\rho}_l$. Quindi, $\forall l$, $\bar{\rho}_l = 0$ e $x_n(a) \to a$ per $n \to +\infty$.

Il Teorema 1 può esser facilmente esteso al caso in cui E, anziché uno spazio metrico sia una unione opportuna di spazi metrici.

COROLLARIO 1. – *Siano* E *ed* N *due insiemi*; *si consideri l'equazione funzionale* (*) *e siano* $f_1$ *e* $f_2$ *due soluzioni di tale equazione. Siano soddisfatte le seguenti ipotesi*:

1) *Sussista una rappresentazione di* E *come unione di insiemi* $E_\alpha$, $E = \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha$, (I *insieme di indici*) *con le seguenti proprietà*:

   *a*) $\forall \alpha$, $E_\alpha$ *sia uno spazio metrico compatto*;

   *b*) $\exists a \in \bigcap_\alpha E_\alpha$, *tale che* $x \in E_\alpha \Rightarrow F(x, a) \in E_\alpha$;

   *c*) *in ogni* $E_\alpha$, $F(x, a)$ *sia continua rispetto ad* $x$ *e attrattiva in* $a$;

2) $\exists \xi \in N$, *tale che*, $\forall x \in E$, $H(u, \xi; x, a)$ *sia iniettiva rispetto ad* $u$;

3) *in ogni* $E_\alpha$ *esista un intorno di* $a$, $U_\alpha(a)$, *tale che*, $\forall x \in U_\alpha(a)$, $f_1(x) = f_2(x)$ *e inoltre* $f_1(a) = f_2(a) = \xi$.

*In queste ipotesi* $f_1$ *e* $f_2$ *coincidono su tutto* E.

TEOREMA 2. – *Sia* E *uno spazio metrico compatto*, N *uno spazio topologico di Hausdorff*; *si consideri l'equazione funzionale* (*) *e siano* $f_1$ *e* $f_2$ *due soluzioni continue di tale equazione. Siano verificate le seguenti ipotesi*:

*a*) $\exists a \in E$, *tale che* $F(x, a)$ *sia continua rispetto ad* $x$ *e non repulsiva in* $a$;

*b*) *Indicati con* $B \equiv \{x : x \in E, \ d(F(x, a), a) = d(x, a)\}$ *e con* $\Lambda_a(x)$ *la classe limite della successione* $\{x_n(a)\}$, *l'insieme* $W \equiv \{x : x \in E, \Lambda_a(x) - B \neq \varnothing\}$ *sia denso in* E;

*c*) *valgano le condizioni* ii) *e* iii) *del Teorema* 1.

*In queste ipotesi* $f_1$ *e* $f_2$ *coincidono su tutto* E.

*Dimostrazione*. Procedendo come nel Teorema 1, $\forall x \in W$, la successione $\{\rho_n\}$ è monotona non crescente, quindi $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = \overline{\rho} \geq 0$. Se fosse $\overline{\rho} > 0$, esisterebbe una sottosuccessione $\{x_{n_k}(a)\}$ di $\{x_n(a)\}$ convergente ad un punto $x^* \in E - B$ con $d(x^*, a) = \overline{\rho}$. Per questo punto si avrebbe;

$$x_1^* = F(x^*, a) = \lim_{n\to+\infty} x_{n_k+1}(a),$$

e inoltre $d(x_1^*, a) < d(x^*, a) = \overline{\rho}$ poiché $x \notin B$. Ma $d(x_{n_k+1}(a), a) \geq \overline{\rho}$ e questo è assurdo.

Procedendo poi come per il Teorema 1 si dimostra ora che, $\forall x \in W$, $f_1(x) = f_2(x)$. Per la continuità di $f_1$ e $f_2$ e la densità di W in E, si può concludere che $f_1$ e $f_2$ coincidono su tutto E.

Si potrebbe a questo punto enunciare per il Teorema 2 un corollario analogo al Corollario 1.

2. – I teoremi precedenti hanno portato a dedurre l'uguaglianza in tutto E di due soluzioni di (*) nell'ipotesi che esse coincidessero in un opportuno intorno di un punto $a$. Si potrebbe però cercare qualche condizione atta a garantire l'unicità della soluzione dell'equazione funzionale (*) senza richiedere una ipotesi di tale natura.

A questo scopo è necessario premettere alcune considerazioni e, per semplicità, verrà assunto, in un primo tempo, come spazio metrico E la sfera $\Sigma = \{x : x \in R^n, \|x\| \leq 1\}$.

Sia $V = V(0)$ un intorno del centro 0 di $\Sigma$ e T un sottoinsieme di $\partial\Sigma$. Si costruisca, $\forall z \in V$ e $\forall x \in T$, la successione $\{x_n(z)\}$. Si consideri, $\forall n$, la semiretta orientata uscente da $z$ e passante per $x_n(z)$; essa interseca $\partial\Sigma$ in un punto $y_n(z)$. In questo modo alla successione $\{x_n(z)\}$ viene associata su $\partial\Sigma$ la successione $\{y_n(z)\}$; si indichi con $\mathcal{C}_z(x)$ la classe limite di $\{y_n(z)\}$. Ad ogni $x \in T \subset \partial\Sigma$ corrisponde così l'insieme $\mathcal{C}_z(x) \subset \partial\Sigma$.

*Definizione*. Sia $T \subset \partial\Sigma$ e $V = V(0)$ un intorno del centro 0 di $\Sigma$ contenuto in una sfera di centro 0 e raggio $\rho$. Si dice che $F : \Sigma \times \Sigma \to \Sigma$ gode della proprietà P(V, T) se, detto $K_z = \bigcup_{x \in T} \mathcal{C}_z(x)$, per ogni calotta sferica aperta C di altezza $1 - \rho$ vale la proprietà: $\forall z \in V$, $K_z \cap C \neq \varnothing$. Si può ora enunciare il seguente teorema:

TEOREMA 3. – *Sia* $\Sigma$ *la sfera unitaria chiusa in* $R^n$ *e sia* N *uno spazio topologico di Hausdorff; si consideri l'equazione funzionale* (*) *e siano* $f_1$ *e* $f_2$ *due soluzioni continue di tale equazione. Esistano un intorno* $V = V(0)$ *del centro* 0 *di* $\Sigma$ *e un insieme* $T \subset \partial\Sigma$ *in modo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi*:

i) $\forall y \in V(0)$, $F(x, y)$ *sia continua rispetto ad* $x$ *ed attrattiva in* $y$;

ii) $\forall y \in V(0)$, $x \neq y \Rightarrow F(x, y) \neq y$;

iii) $F(x, y)$ *goda della proprietà* P(V, T);

iv) *detto* $S = \{x : x \in \Sigma, f_1(x) = f_2(x)\}$, *sia* $0 \in S$ *e* $T \subset S$.

*Allora esiste un intorno* U(0) *con* U(0) $\subset$ S.

*Dimostrazione*. Si osservi preliminarmente che, poichè $f_1$ e $f_2$ sono continue e N è uno spazio di Hausdorff, l'insieme S è chiuso in $\Sigma$.

Si supponga, per assurdo, che in ogni sfera $\sigma_n$, $\sigma_n \equiv \{x : x \in \Sigma, \|x\| < 1/n\}$, $(n = 1, 2, \cdots)$, cada almeno un punto $z_n \notin S$, cioè $z_n \in \sigma_n - S$. Essendo $\sigma_n - S$ un insieme aperto, $z_n$ sarà punto interno; si indichi con $\tau_n$ la sfera, con centro in $z_n$ e raggio massimo $\rho_n$, tutta contenuta in $\sigma_n - S$. Si osservi che $\rho_n \to 0$ per $n \to +\infty$ (infatti $\rho_n \leq d(z_n, 0) < 1/n$) e quindi esiste $\bar{n}$ tale che, $\forall n \geq \bar{n}$, $\tau_n \subset V$. Si fissi $n \geq \bar{n}$; su $\partial\tau_n$ esiste almeno un punto $z \in S$. Si indichi con $r$ il punto in cui la semiretta orientata $\gamma$ uscente da $z$ e passante per $z_n$ interseca $\partial\Sigma$. Si consideri la calotta sferica aperta C di altezza $1 - \rho$ ottenuta sezionando $\Sigma$ con un iperpiano perpendicolare alla semiretta $\gamma$. Per la proprietà P (V, T) esiste almeno un punto $x \in T$ tale che $\mathcal{C}_z(x) \cap C \neq \varnothing$. Si consideri ora la successione $\{x_n(z)\}$. Essa gode delle seguenti proprietà:

*a*) $\forall n$, $x_n(z) \in S$, (ovvio poichè $x \in S$, $z \in S$);

*b*) $x_n(z) \to z$, (per l'ipotesi i));

*c*) per infiniti indici $n$, $x_n(z) \in \tau_n$ (per le ipotesi i) e iii)).

Quest'ultimo fatto è in contrasto con la definizione di $\tau_n$. Esiste pertanto un intorno U(0) con U(0) $\subset$ S.

*Osservazione 3*. – Se alle ipotesi del Teorema 3 si aggiunge la seguente:

v) $\exists \xi \in N$, tale che, $\forall x \in \Sigma$, $H(u, \xi; x, 0)$ sia iniettiva rispetto ad $u$, si ottiene il seguente risultato: se $f_1(0) = f_2(0) = \xi$ allora $f_1$ e $f_2$ coincidono su tutto $\Sigma$, cioè $\Sigma \equiv S$.

Il seguente corollario permette, sotto opportune ipotesi, di generalizzare il Teorema 3 nel caso di spazi metrici.

COROLLARIO 2. – *Sia* E *uno spazio metrico compatto e* N *uno spazio topologico di Hausdorff; si consideri l'equazione funzionale* (*). *Esista un intorno* $\mathcal{C}$ *di un punto* $a \in E$ *che verifichi le seguenti ipotesi*:

1) $F : \bar{\mathcal{C}} \times \bar{\mathcal{C}} \to \bar{\mathcal{C}}$;
2) *esiste una funzione* $g$, $g : \bar{\mathcal{C}} \to \Sigma$, *biunivoca e suriettiva*;
3) $g(a) = 0$ (0 *centro di* $\Sigma$); $g(\partial\mathcal{C}) = \partial\Sigma$;
4) *esistano un intorno* $V = V(0)$ *e un insieme* $T \subset \partial\Sigma$ *in modo che la funzione* $G(\tau, \sigma) = g[F(g^{-1}(\tau), g^{-1}(\sigma))]$, *con* $\tau, \sigma \in \Sigma$, *verifichi le ipotesi* i), ii), iii) *del Teorema* 3;
5) $\exists \xi \in N$, *tale che* $H(u, \xi; x, a)$ *sia iniettiva rispetto ad* $u$, $\forall x \in \bar{\mathcal{C}}$;
6) *siano* $f_1$ *e* $f_2$ *due soluzioni dell'equazione funzionale* (*) *tali che*: $f_1(a) = f_2(a) = \xi$; $f_1(\rho) = f_2(\rho)$, $\forall \rho \in g^{-1}(T)$; *inoltre* $h_i(\tau) = f_i(g^{-1}(\tau))$ $(i = 1, 2)$ *siano funzioni continue in* $\Sigma$.

*In queste ipotesi* $f_1$ *e* $f_2$ *coincidono su tutto* $\bar{\mathcal{C}}$.

*Dimostrazione*. Si consideri l'equazione funzionale (*); $\forall x, y \in \overline{\mathcal{C}}$, si ponga $x = g^{-1}(\tau)$, $y = g^{-1}(\sigma)$ con $\tau, \sigma \in \Sigma$. L'equazione funzionale diviene

$$f[\mathrm{F}(g^{-1}(\tau), g^{-1}(\sigma)] = \mathrm{H}[f(g^{-1}(\tau)), f(g^{-1}(\sigma)); g^{-1}(\tau), g^{-1}(\sigma)]$$

oppure

$$f[g^{-1}(\mathrm{G}(\tau, \sigma))] = \mathrm{H}[f(g^{-1}(\tau)), f(g^{-1}(\sigma)); g^{-1}(\tau), g^{-1}(\sigma)].$$

Inoltre, poichè $h = f \circ g^{-1}$, posto $\mathrm{K}(u, v; \tau, \sigma) = \mathrm{H}(u, v; g^{-1}(\tau), g^{-1}(\sigma))$ l'equazione diviene

$$h(\mathrm{G}(\tau, \sigma)) = \mathrm{K}[h(\tau), h(\sigma); \tau, \sigma].$$

Per il Teorema 3 e l'Osservazione 3 si ottiene $h_1(\tau) = h_2(\tau)$, $\forall \tau \in \Sigma$. Ora poichè $g^{-1}(\Sigma) = \overline{\mathcal{C}}$ segue $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in \overline{\mathcal{C}}$.

*Osservazione 4*. – Se valgono inoltre le ipotesi del Teorema 1 dall'uguaglianza di $f_1$ e $f_2$ in $\mathcal{C}$, segue la coincidenza delle due soluzioni su tutto E.

## BIBLIOGRAFIA

[1] J. ACZÉL, *On Applications and Theory of Functional Equations* (Birkhauser, Basel, 1969, 22–25).

[2] C. T. NG, *Uniqueness Theorems for a General Class of Functional Equations*, « Journn. Australian Math. Soc. », *11*, 362–366 (1970).