
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LUIGI CEROFOLINI

**Sulla dimensione del nucleo per una classe di
operatori differenziali su varietà compatte**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 50 (1971), n.4, p. 421–423.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_4_421_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sulla dimensione del nucleo per una classe di operatori differenziali su varietà compatte* (*). Nota di LUIGI CEROFOLINI, presentata (**) dal Corrisp. G. CIMMINO.

SUMMARY. — Let $\pi: X \rightarrow \tilde{X}$ be a morphism of compact differentiable manifolds and (d, N) [resp. $\tilde{d}$] a differential operator on $(X, \partial X)$ [resp. $\tilde{X}$]. Under suitable assumptions the formula: $\dim \text{Ker } \tilde{d} - \dim \text{Ker } (d, N) = k$ is given, where k is an integer depending only on the order of d and N and on the number of components of ∂X .

INTRODUZIONE

Mediante un morfismo di varietà differenziabili compatte $\pi: X \rightarrow \tilde{X}$, con X varietà con bordo e $\tilde{X}$ varietà senza bordo, si associa ad ogni operatore differenziale (d, N) su $(X, \partial X)$ compatibile con π un operatore differenziale $\tilde{d}$ su $\tilde{X}$ e sotto opportune ipotesi si stabilisce la relazione:

$$\dim \text{Ker } \tilde{d} - \dim \text{Ker } (d, N) = k$$

dove k è un intero > 0 che dipende solo dal numero delle componenti di ∂X e dall'ordine degli operatori d e N .

Le notazioni usate sono standard. Cfr. ad esempio: [1] e [2].

Tutte le varietà considerate saranno, salvo avviso esplicito del contrario, reali, C^∞ , connesse, compatte, eventualmente con bordo e orientabili.

Sia X una varietà di dimensione $n \geq 1$ con bordo $\partial X = Y = \bigcup_{j=1}^p Y_j$, con Y_j diffeomorfa ($\approx$) a S^{n-1} , $1 \leq j \leq p$, dove come al solito $S^{n-1} = \partial B^n$ essendo $B^n = \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid \|\xi\| \leq 1\}$.

Denotiamo con $\tilde{X}$ lo spazio topologico che si ottiene da X identificando Y_j con un punto $x_j \in Y_j$, $1 \leq j \leq p$.

Sia $\pi: X \rightarrow \tilde{X}$ la proiezione canonica.

PROPOSIZIONE 1. $\tilde{X}$ ha una struttura naturale di varietà differenziabile compatta e senza bordo. Inoltre $\pi: X \rightarrow \tilde{X}$ è C^∞ .

Dimostrazione. È chiaro intanto che $\tilde{X}$ è uno spazio compatto per la topologia quoziente, e se $\tilde{X} = X \setminus Y$ e $\pi(Y_j) = \tilde{x}_j$, $1 \leq j \leq p$, $\pi/\tilde{X}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p\}$ è un omeomorfismo. Sia $\mathcal{C}_0$ un atlante di carte per la sottovarietà $\tilde{X}$ di X . Per trasporto di struttura tramite la $\pi/\tilde{X}$ otteniamo un atlante di carte $\tilde{\mathcal{C}}_0$ per $\tilde{X} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p\}$. Possiamo poi sempre trovare $Y_\varepsilon \approx Y \times [0, \varepsilon)$ intorno tipo collare di Y in modo tale che $\pi(Y_\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^p \tilde{Y}_{\varepsilon, j}$,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Contratti di Ricerca del C.N.R.

(**) Nella seduta del 17 aprile 1971.

l'unione essendo disgiunta. Per l'ipotesi $Y_j \approx S^{n-1}$, $1 \leq j \leq p$ ogni $\tilde{Y}_{e,j}$ è $\approx \tilde{B}^n$ per tutti gli $1 \leq j \leq p$. A questo punto si può concludere facilmente che $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}_0 \cup \{\tilde{Y}_{e,j} \cdots \tilde{Y}_{e,p}\}$ è un atlante di carte per $\tilde{X}$.

Dalla costruzione di $\tilde{\mathcal{A}}$ si ha anche che $\pi: X \rightarrow \tilde{X}$ è C^∞ .

Infatti in un intorno $Y_{e,j}$ di Y_j , $1 \leq j \leq p$, $\pi: X \rightarrow \tilde{X}$ si può identificare a $\gamma: \tilde{C}B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $\xi \mapsto \left(1 - \frac{1}{\|\xi\|}\right)\xi$.

Resta così provato l'asserto.

COROLLARIO 1. *La restrizione $\pi/\tilde{X}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p\}$ è un diffeomorfismo.*

Poniamo ora:

$$\mathcal{C}_\pi = \mathcal{C}_\pi(X) = \{u \in C^\infty(X) \mid \exists \tilde{u} \in C^\infty(\tilde{X}) : u = \tilde{u} \circ \pi\}.$$

PROPOSIZIONE 2. $\mathcal{C}_\pi$ è canonicamente isomorfo a $C^\infty(\tilde{X})$.

Dimostrazione. Se u_1 e $u_2 \in C^\infty(\tilde{X})$ sono tali che $u_1 \circ \pi = u_2 \circ \pi$, per il Cor. 1 si ha che $\tilde{u}_1(a) = \tilde{u}_2(a)$, $\forall a \in \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p\}$ e quindi per densità $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$. Resta così determinata una applicazione lineare $\sim: C_\pi \rightarrow C^\infty(X)$ che denotiamo $u \mapsto \tilde{u}$. Poichè l'applicazione lineare di $C^\infty(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{C}_\pi$ definita da $\tilde{u} \mapsto \tilde{u} \circ \pi$ è inversa a destra di $\sim$, quest'ultima è suriettiva. Se ora $u, v \in \mathcal{C}_\pi$ sono tali che $\tilde{u} = \tilde{v}$, per il Cor. 1 si ha che $u(x) = v(x) \quad \forall x \in \tilde{X}$ e quindi $u = v$. L'applicazione lineare $\sim$ è quindi anche iniettiva e con ciò resta provato l'asserto.

PROPOSIZIONE 3. $\mathcal{C}_\pi$ è un sottospazio chiuso di $C^\infty(X)$.

Dimostrazione. Per il teorema del grafico chiuso e la prop. 2 basterà mostrare che se $\tilde{u}_n \rightarrow 0$ in $C^\infty(\tilde{X})$ allora $\tilde{u}_n \circ \pi \rightarrow 0$ in $C^\infty(X)$. Per questo in base al Cor. 1 sarà sufficiente verificare che $u_n \circ \pi \rightarrow 0$ in $C^\infty(K)$, K compatto regolare contenuto in un intorno tipo collare abbastanza piccolo di Y . Poichè $\tilde{u}_n = (\tilde{u}_n \circ \pi)^\sim \rightarrow 0$ per ipotesi tende a zero assieme a tutte le derivate uniformemente in $\pi(K)$, per il Cor. 1 si può concludere che $\tilde{u}_n \circ \pi$ tende a zero assieme a tutte le derivate uniformemente su $K \setminus Y$ e quindi per densità su K .

Sia $\mathcal{Q}_\pi$ la classe degli operatori differenziali d su X tali che $du \in \mathcal{C}_\pi$ se $u \in \mathcal{C}_\pi$. In base alle Prop. 3 e 4 è quindi naturale associare a $d \in \mathcal{Q}_\pi$ un operatore $\tilde{d}: C^\infty(\tilde{X}) \rightarrow C^\infty(\tilde{X})$ mediante la relazione:

$$\tilde{d}\tilde{u} = \tilde{du} \quad , \quad \tilde{u} \in C^\infty(\tilde{X}).$$

PROPOSIZIONE 4. *Se $d \in \mathcal{Q}_\pi$ l'operatore $\tilde{d}: C^\infty(\tilde{X}) \rightarrow C^\infty(\tilde{X})$ è un operatore differenziale.*

Dimostrazione. Se $u \in C^\infty(\tilde{X})$ è tale che $\tilde{u}/\omega = 0$, con ω aperto di $\tilde{X}$, allora $(\tilde{u} \circ \pi)(x) = 0 \quad \forall x \in \pi^{-1}(\omega)$ e quindi, poichè d è un operatore differenziale, si ha anche $(d(\tilde{u} \circ \pi))(x) = 0 \quad \forall x \in \pi^{-1}(\omega)$. Poichè per definizione $\tilde{du} = (\tilde{d}(\tilde{u} \circ \pi))^\sim$ possiamo concludere che $\tilde{d}\tilde{u} = 0$ su ω . Se ne deduce

quindi che $\text{supp } \tilde{d}\tilde{u} \subset \text{supp } \tilde{u}$. Per il teorema di Peetre [1], $\tilde{d}$ è un operatore differenziale.

Denotiamo come al solito con $T(X)$ il fibrato tangente di X e sia $T(X)|_Y$ la restrizione di $T(X)$ a Y .

Sia $v \in C^\infty(Y; T(X)|_Y)$ un campo vettoriale $\neq 0$ e non tangenziale a Y e $N_{l_j} = \left(\frac{\partial^h}{\partial v^h} \right)_{0 \leq h \leq l_j-1}$ l'operatore differenziale frontiera associato a v su Y_j d'ordine $l_j - 1$, $1 \leq j \leq p$.

Scriviamo poi $l = (l_1, \dots, l_p)$ e $N_l = (N_{l_1}, \dots, N_{l_p})$.

Se $d \in \mathcal{Q}_\pi$ restano così determinati gli operatori:

$$(d, N_l): C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X) \times \underbrace{\prod_{j=1}^p C^\infty(Y_j) \times \dots \times C^\infty(Y_j)}_{l_j - \text{volte}}$$

$$\tilde{d}: C^\infty(\tilde{X}) \rightarrow C^\infty(\tilde{X})$$

definiti rispettivamente da:

$$(d, N_l)u = (du; N_{l_1}u, \dots, N_{l_p}u), \quad u \in C^\infty(X)$$

$$\tilde{d}\tilde{u} = \tilde{d}u, \quad u \in C^\infty(\tilde{X}).$$

DEFINIZIONE 1. Diremo che $d \in \mathcal{Q}_\pi$ è in $\mathfrak{F}_\pi^{v,l}$ se $\dim \text{Ker } (d, N_l)$ e $\dim \text{Ker } \tilde{d}$ sono finite e $\text{Ker } (d, N_l) \subset \mathcal{C}_\pi$.

TEOREMA 1. Per ogni $d \in \mathfrak{F}_\pi^{v,l}$ si ha:

$$\dim \text{Ker } \tilde{d} - \dim \text{Ker } (d, N_l) = k$$

$$\text{dove } k = \sum_{j=1}^p \binom{l_j + n}{l_j}.$$

Dimostrazione. Se μ è un intero ≥ 0 denotiamo con J_x^μ lo spazio vettoriale dei μ -getti al punto $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e con $\tilde{u} \mapsto j_\mu(\tilde{u})_{\tilde{x}}$ l'applicazione lineare canonica di $C^\infty(\tilde{X}) \rightarrow J_x^\mu$. In base all'ipotesi che $v \neq 0$ e non tangenziale a Y si ha che $N_{l_j}u = 0$ su Y_j se e solo se $j_{l_j}(u)_{\tilde{x}_j} = 0$ per $1 \leq j \leq p$. Ne segue che se $\tilde{u} \in \text{Ker } \tilde{d}$ verifica $j_{l_j}(u)_{\tilde{x}_j} = 0$, si ha che la corrispondente $u \in \mathcal{C}_\pi$ è tale che $(d, N_l)u = 0$. In base all'ipotesi che $\text{Ker } (d, N_l) \subset \mathcal{C}_\pi$ vale anche l'affermazione inversa. Tenendo conto che $\dim J_{\tilde{x}_j}^{l_j} = \binom{n+l_j}{l_j}$ $1 \leq j \leq p$ si ha l'affermazione del Teorema 1.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds*. Masson, Paris, North Holland, Amsterdam 1968.
- [2] R. S. PALAIS, *Seminar on the Atiyah-Singer Index theorem*. Annals of Mathematics Studies, n. 57. Princeton 1965.