Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Sulla propagazione di onde termoclastiche in un mezzo omogeneo isotropo. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.3, p. 304–312.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_3_304_0>

Termoelasticità. — *Sulla propagazione di onde termoelastiche in un mezzo omogeneo isotropo.* Nota II [(*)] del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In a previous paper we have considered the propagation of thermoelastic waves in an homogeneous isotropic indefinite elastic medium, on the admission that in an assigned region of the medium act general body forces, and are distributed heating sources. Therefore we have exposed a procedure that reduces the determination of the displacement vector $\boldsymbol{u}$ of a point, and the temperature T, to the determination of two other vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, and a scalar function Ψ. The question simplifies itself in the remarkable case that the linear coefficient of the thermal expansion, as in general, is sufficiently small that we can neglect the terms which contain its square. In this case, by introduction of suitable potential functions, we have assigned the values of the vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, and the function Ψ.

In this paper we assign now the explicit values of the displacement $\boldsymbol{u}$ in every point of the elastic medium, and of the temperature T. In particular we deduce the formulas relative to the case in which the region where act the body forces and are distributed the heating sources, vanishes around a point.

1. In una nota precedente, considerando le equazioni indefinite della Termoelasticità per un mezzo omogeneo isotropo

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \boldsymbol{u} - (a^2 - b^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \frac{\gamma}{\rho} \operatorname{grad} \mathrm{T} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathrm{T} - \frac{(3\lambda + 2\mu)\,\alpha \mathrm{T}_0}{\lambda_{\mathrm{T}}} \operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\mathrm{Q}}{\lambda_{\mathrm{T}}} = 0 \tag{2}$$

dove i simboli hanno il significato ivi specificato, ho mostrato come la determinazione del vettore spostamento $\boldsymbol{u}$ di un punto del mezzo elastico e della temperatura T si può ridurre alla determinazione di due vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, e di una funzione scalare Ψ, definiti rispettivamente dalle equazioni

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \Delta_2 \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{F} \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2\right) \Delta_2 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{F} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right)\Psi + \frac{\gamma^2 \mathrm{T}_0}{\rho\lambda_{\mathrm{T}}}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2 \Psi = \\ = \frac{\gamma}{\rho\lambda_{\mathrm{T}}}\mathrm{Q} - \frac{\gamma^2 \mathrm{T}_0}{\rho\lambda_{\mathrm{T}}}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2 \theta_1 ,\end{aligned} \tag{5}$$

essendo $\theta_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1$, $\theta_2 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_2$, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$.

Avuti i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ e la funzione Ψ, lo spostamento u veniva dato da

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}(\theta_1 - \theta_2 + \Psi) + \Delta_2 \boldsymbol{u}_2 \tag{6}$$

e l'equazione (2) della temperatura diveniva

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{T} - \frac{\gamma \mathrm{T}_0}{\lambda_{\mathrm{T}}}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2(\theta_1 + \Psi) + \frac{\mathrm{Q}}{\lambda_{\mathrm{T}}} = 0 . \tag{7}$$

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1971.

Essendo poi la costante γ proporzionale al coefficiente di dilatazione termica lineare α, poichè questo è generalmente molto piccolo, trascurando i termini che contengono il quadrato di esso, la (5) si riduceva alla

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\right)\Psi = \frac{\gamma}{\rho\lambda_T}\,Q. \tag{8}$$

Da questa risulta che gli integrali dipendenti dal calore Q delle sorgenti sono proporzionali a γ, e quindi ad α. Allora anche l'equazione (7) della temperatura si semplifica nella seguente

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)T = \frac{\gamma T_0}{\lambda_T}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2 \operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 - \frac{Q}{\lambda_T}. \tag{9}$$

Nel caso dunque di α sufficientemente piccolo la questione si riduce alla considerazione delle equazioni (3), (4), (8) e (9).

In questo caso, riferendoci a un mezzo elastico indefinito, nell'ipotesi che le forze di massa $\boldsymbol{F}$ e le sorgenti di calore siano distribuite in una regione assegnata del mezzo di volume S, e prescindendo dalle oscillazioni libere, ho ottenuto per i vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ i valori

$$\boldsymbol{u}_1(P,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_M}\frac{dS_M}{r}\int_0^r dr\int_0^r \boldsymbol{F}\left(M, t - \frac{r}{a}\right)dr \tag{10}$$

$$\boldsymbol{u}_2(P,t) = \frac{1}{4\pi b^2}\int_{S_M}\frac{dS_M}{r}\int_0^r dr\int_0^r \boldsymbol{F}\left(M, t - \frac{r}{b}\right)dr, \tag{11}$$

dove S_M è il volume descritto dal punto M nel quale agiscono le forze e le sorgenti di calore, ed r è la distanza del punto variabile M dal punto P.

Inoltre la funzione Ψ è data da (1)

$$\Psi(P,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{S_M}\frac{dS_M}{r}\int_0^{t-(r/a)} d\eta\int_0^{t+(r/a)} d\xi\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(M, r + 2u\sqrt{kt})\,e^{-u^2}\,du\right]_{\substack{r=a(\xi-\eta)/2\\ t=(\xi+\eta)/2}}. \tag{12}$$

Questa funzione, dove la f è definita dall'inversione dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(P, 2u\sqrt{kt})\,e^{-u^2}\,du = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{\gamma}{\rho\lambda_T}\,Q(P,t), \tag{13}$$

(1) La funzione sotto il segno di integrale di volume nella (12) si può rendere regolare per $r = 0$, sottraendo da essa una funzione $W = \frac{1}{r}\Gamma\left(M, t - \frac{r}{a}\right)$, soluzione dell'equazione omogenea $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\right)W = 0$, scegliendo Γ in modo che risulti

$$\lim_{r\to 0}\left\{\int_0^{t-(r/a)} d\eta\int_0^{t+(r/a)} d\xi\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(M, r + 2u\sqrt{kt})\,e^{-u^2}du\right]_{\substack{r=a(\xi-\eta)/2\\ t=(\xi-\eta)/2}} - \Gamma\left(M, t - \frac{r}{a}\right)\right\} = 0.$$

nei punti interni al volume S verifica l'equazione

$$(14)\qquad \left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\,\Delta_2\right)\Psi = -4\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{P},\, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,,$$

mentre nei punti esterni verifica l'equazione omogenea corrispondente.

Infatti, dalla (12) si ricava

$$(15)\qquad \mathrm{U} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\,\Delta_2\right)\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathrm{S_M}} \frac{\mathrm{dS_M}}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{M}\,,\, r + 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,,$$

relazione valida in tutto lo spazio. Si tratta allora di far vedere che nei punti interni al volume S è

$$(16)\qquad \left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{U} = -4\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{P},\, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Consideriamo per questo l'espressione

$$(17)\qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathrm{S_M}} \frac{\mathrm{dS_M}}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(\mathrm{M}\,,\, r + 2\,u\,\sqrt{kt}) - f(\mathrm{M}\,,\, 2\,u\,\sqrt{kt})\}\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

e osserviamo che ponendo $\zeta = 2\,u\,\sqrt{kt}$, si ha

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\{f(\mathrm{M}\,,\, r + 2\,u\,\sqrt{kt}) - f(\mathrm{M}\,,\, 2\,u\,\sqrt{kt})\} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\,.$$

Perciò la funzione sotto il segno di integrale di volume nella (17) resta finita quando $r \to 0$, cioè quando il punto M coincide con P. Possiamo allora applicare l'operatore $(\Delta_2)_\mathrm{P}$ sotto il segno di integrazione, e osservando che $\Delta_2 \frac{1}{r} = 0$, abbiamo

$$(18)\qquad (\Delta_2)_\mathrm{P}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(\Delta_2)_\mathrm{P}\int_{\mathrm{S_M}} \frac{\mathrm{dS_M}}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{M}\,,\, r + 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\, -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(\Delta_2)_\mathrm{P}\int_{\mathrm{S_M}} \frac{\mathrm{dS_M}}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{M}\,,\, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathrm{S_M}} (\Delta_2)_\mathrm{P}\left\{\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{M}\,,\, r + 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{dS_M}\,.$$

Ora per il teorema di Poisson relativo ai potenziali newtoniani di volume risulta

$$(\Delta_2)_\mathrm{P}\int_{\mathrm{S_M}} \frac{\mathrm{dS_M}}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{M}\,,\, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -4\,\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{P}\,,\, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,,$$

ed è d'altra parte

$$(\Delta_2)_\mathrm{P}\left\{\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{M}\,,\, r + 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right\} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{M}\,,\, r + 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right\}.$$

Perciò la (18) porge

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{S_M}\frac{dS_M}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} f(M\,,r+2\,u\sqrt{kt})\,e^{-u^2}\,du\right\} =$$

$$-4\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(P,\,2\,u\sqrt{kt})\,e^{-u^2}\,du\,,$$

che dimostra la (16), e quindi la (14).

2. Proponiamoci ora di assegnare, nel caso considerato, i valori espliciti dello spostamento $\boldsymbol{u}$ dei punti del mezzo elastico e della temperatura T.

Osserviamo intanto che mediante integrazioni per parti si ha

$$\frac{1}{r}\int_0^r dr\int_0^r \boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)dr = \int_0^r \frac{dr}{r^2}\int_0^r r\boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)dr. \tag{19}$$

Si ricava quindi dalle (10) e (11)

$$\theta_1 \equiv \operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 = -\frac{1}{4\,\pi a^2}\int_{S_M}\left\{\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\int_0^r r\boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)dr\right\}dS_M \tag{20}$$

$$\theta_2 \equiv \operatorname{div}\boldsymbol{u}_2 = -\frac{1}{4\,\pi b^2}\int_{S_M}\left\{\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\int_0^r r\boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{b}\right)dr\right\}dS_M\,. \tag{21}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\theta_1-\theta_2) = \frac{1}{4\,\pi a^2}\int_{S_M}\Bigg\{&\frac{1}{r}\boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)\times\\ &\times\operatorname{grad} r\cdot\operatorname{grad} r - \frac{d\operatorname{grad} 1/r}{dP}\int_0^r r\boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)dr\Bigg\}dS_M -\\ -\frac{1}{4\,\pi b^2}\int_{S_M}\Bigg\{&\frac{1}{r}\boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{b}\right)\times\operatorname{grad} r\cdot\operatorname{grad} r -\\ &-\frac{d\operatorname{grad} 1/r}{dP}\int_0^r r\boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{b}\right)dr\Bigg\}dS_M\,,\end{aligned} \tag{22}$$

dove $d\operatorname{grad}\frac{1}{r}\Big/dP$ è un operatore omografico tale che se $x\,,y\,,z$ sono le coordinate del punto P, ed X , Y , Z, le componenti di $\boldsymbol{F}$, si ha

$$\frac{d\operatorname{grad} 1/r}{dP}\int_0^r r\boldsymbol{F}\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)dr = \frac{\partial\operatorname{grad} 1/r}{\partial x}\int_0^r rX\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)dr +$$

$$+\frac{\partial\operatorname{grad} 1/r}{\partial y}\int_0^r rY\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)dr + \frac{\partial\operatorname{grad} 1/r}{\partial z}\int_0^r rZ\left(M\,,t-\frac{r}{a}\right)dr.$$

Dalla (12) si ha inoltre

$$(23)\quad \operatorname{grad}\Psi = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{S_M} dS_M \left\{-\frac{1}{r^2}\int_0^{t-(r/a)} d\eta \int_0^{t+(r/a)} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(M\,, r+2\,u\sqrt{kt})_{\substack{r=a(\xi-\eta)/2\\ t=(\xi+\eta)/2}} e^{-u^2}\,du - \right.$$
$$-\frac{1}{ar}\int_0^{t+(r/a)} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(M\,, \frac{a}{2}\left(\xi - t + \frac{r}{a}\right) + 2\,u\sqrt{\frac{k}{2}\left(\xi + t - \frac{r}{a}\right)}\right) e^{-u^2}\,du +$$
$$\left. + \frac{1}{ar}\int_0^{t-(r/a)} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(M\,, \frac{a}{2}\left(t + \frac{r}{a} - \eta\right) + 2\,u\sqrt{\frac{k}{2}\left(t + \frac{r}{a} + \eta\right)}\right) e^{-u^2}\,du\right\} \operatorname{grad} r.$$

Infine dalla (11) si ricava

$$(24)\qquad \Delta_2\,\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{4\,\pi b^2}\int_{S_M} \boldsymbol{F}\left(M\,, t - \frac{r}{b}\right)\frac{dS_M}{r}\,.$$

Sostituendo le (22), (23) e (24) nella (6), si ottiene per lo spostamento $\boldsymbol{u}$ l'espressione [2]

$$(25)\quad \boldsymbol{u} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_M}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{1}{a^2}\boldsymbol{F}\left(M\,, t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2}\boldsymbol{F}\left(M\,, t - \frac{r}{b}\right)\right] \times \operatorname{grad} r\cdot\operatorname{grad} r - \right.$$
$$\left. - \frac{d\operatorname{grad} 1/r}{dP}\int_0^r r\left[\frac{1}{a^2}\boldsymbol{F}\left(M\,, t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2}\boldsymbol{F}\left(M\,, t - \frac{r}{b}\right)\right] dr\right\} dS_M +$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{S_M} dS_M \left\{-\frac{1}{r^2}\int_0^{t-(r/a)} d\eta \int_0^{t+(r/a)} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(M\,, r + 2\,u\sqrt{kt})_{\substack{r=a(\xi-\eta)/2\\ t=(\xi+\eta)/2}} e^{-u^2}\,du - \right.$$
$$-\frac{1}{ar}\int_0^{t+(r/a)} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(M\,, \frac{a}{2}\left(\xi - t + \frac{r}{a}\right) + 2\,u\sqrt{\frac{k}{2}\left(\xi + t - \frac{r}{a}\right)}\right) e^{-u^2}\,du +$$
$$\left. + \frac{1}{ar}\int_0^{t-(r/a)} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(M\,, \frac{a}{2}\left(t + \frac{r}{a} - \eta\right) + 2\,u\sqrt{\frac{k}{2}\left(t + \frac{r}{a} + \eta\right)}\right) e^{-u^2}\,du\right\} \operatorname{grad} r +$$
$$+ \frac{1}{4\,\pi b^2}\int_{S_M} \boldsymbol{F}\left(M\,, t - \frac{r}{b}\right)\frac{dS_M}{r}\,,$$

dove si può scrivere anche

$$\int_0^r r\left[\frac{1}{a^2}\boldsymbol{F}\left(M\,, t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2}\boldsymbol{F}\left(M\,, t - \frac{r}{b}\right)\right] dr = -\int_{r/a}^{r/b} \tau\boldsymbol{F}(M\,, t - \tau)\,d\tau\,.$$

(2) In base all'osservazione fatta nella nota (1), nel secondo membro della (23), e nel secondo membro della (25), va aggiunto l'integrale

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{S_M}\left\{\frac{1}{r^2}\,\Gamma\left(M\,, t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{ar}\,\Gamma'\left(M\,, t - \frac{r}{a}\right)\right\} \operatorname{grad} r\cdot dS_M\,.$$

3. Per avere ora il valore della temperatura T osserviamo intanto che per la linearità dell'equazione (9), possiamo porre $T = T_1 + T_2$, con T_1 e T_2 soddisfacenti rispettivamente alle equazioni:

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right) T_1 = \frac{\gamma T_0}{\lambda_T}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\Delta_2 \boldsymbol{u}_1 \tag{26}$$

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right) T_2 = -\frac{Q}{\lambda_T}, \tag{27}$$

dove, analogamente alla (24), è

$$\Delta_2 \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_M} \boldsymbol{F}\left(M, t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS_M}{r}. \tag{28}$$

Poniamo ora

$$T_1 = \mathrm{div}\,\boldsymbol{w} \tag{29}$$

con $\boldsymbol{w}$ vettore da determinare. Sostituendo nella (26) questa si può scrivere

$$\mathrm{div}\left\{\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{w} - \frac{\gamma T_0}{\lambda_T}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2 \boldsymbol{u}_1\right\} = 0,$$

la quale si può soddisfare ponendo

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{w} = \frac{\gamma T_0}{\lambda_T}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2 \boldsymbol{u}_1. \tag{30}$$

Posto ancora

$$\boldsymbol{\Phi}(P, t) = \frac{\gamma T_0}{\lambda_T}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2 \boldsymbol{u}_1 = \frac{\gamma T_0}{4\pi a^2 \lambda_T}\int_{S_M} \boldsymbol{F}'\left(M, t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS_M}{r}, \tag{31}$$

dove l'apice indica derivazione rispetto al tempo, si ha

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\Phi}(P, t). \tag{32}$$

In modo analogo a quanto si è visto per la funzione U definita dalla (15) si ha che se poniamo

$$\boldsymbol{w}(P, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{S_M}\frac{dS_M}{r}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{V}(M, r + 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2} du, \tag{33}$$

il vettore $\boldsymbol{w}$ nei punti interni al volume S verifica l'equazione

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{w} = -4\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{V}(P, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2} du, \tag{34}$$

e confrontando con la (32), si ha che il vettore $\boldsymbol{V}$ è dato dall'inversione dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{V}(P, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2} du = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\boldsymbol{\Phi}(P, t). \tag{35}$$

Prendendo la divergenza del vettore $\boldsymbol{w}(\mathrm{P}, t)$, per la (29) si ha la temperatura T_1.

Per quanto riguarda la temperatura T_2, definita dalla (27), abbiamo analogamente

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{S_M}} \frac{d\mathrm{S_M}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du, \tag{36}$$

dove la funzione g è data dall'inversione dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\,\lambda_{\mathrm{T}}}\, \mathrm{Q}(\mathrm{P}, t), \tag{37}$$

e dal confronto di questa con la (13), si ha che $g = -\rho f/y$.

La temperatura T risulta così composta di una parte T_1 dipendente dalle forze di massa, e di una parte T_2 dipendente dal calore delle sorgenti.

4. Consideriamo ora il caso in cui il dominio S nel quale agiscono le forze di massa $\boldsymbol{F}$, e nel quale sono distribuite le sorgenti di calore, sia evanescente nell'intorno di un punto O, che si può assumere come origine delle coordinate, e supponiamo che l'integrale $\int_{\mathrm{S}} \rho \boldsymbol{F}(\mathrm{P}, t)\, d\mathrm{S}$, si mantenga finito. Ponendo allora

$$\int_{\mathrm{S}} \rho \boldsymbol{F}(\mathrm{P}, t)\, d\mathrm{S} = \varphi(t), \tag{38}$$

dalle formule (10) e (11) si deducono per i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, i seguenti valori

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r \varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) dr \\ \boldsymbol{u}_2 &= \frac{1}{4\pi b^2 \rho} \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r \varphi\left(t - \frac{r}{b}\right) dr . \end{aligned} \tag{39}$$

dove r è ora la distanza del punto P dal punto O.

Mediante integrazioni per parti, analoghe alla (19), si ha

$$\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_0^r \frac{dr}{r^2} \int_{r/a}^{r/b} \tau\varphi(t-\tau)\, d\tau \tag{40}$$

prendendo quindi la divergenza di ambo i membri, e successivamente il gradiente rispetto al punto P, si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \operatorname{div} (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = \frac{1}{4\pi\rho} \Bigg\{ &\frac{d \operatorname{grad} 1/r}{d\mathrm{P}} \int_{r/a}^{r/b} \tau\varphi(t-\tau)\, d\tau - \\ &- \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \left[\frac{r}{a^2} \varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{r}{b^2} \varphi\left(t - \frac{r}{b}\right)\right] \cdot \operatorname{grad} r \Bigg\}. \end{aligned} \tag{41}$$

La (24) porge inoltre

$$\Delta_2 \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{4\pi b^2 \rho} \cdot \frac{1}{r} \varphi\left(t - \frac{r}{b}\right). \tag{42}$$

Supposto ancora che al rendersi evanescente del volume S, gli integrali $\int_S f(\mathrm{P}, \zeta)\, \mathrm{dS}$, $\int_S \mathrm{Q}(\mathrm{P}, t)\, \mathrm{dS}$, si mantengano finiti, posto

$$\int_S f(\mathrm{P}, \zeta)\, \mathrm{dS} = \mathcal{F}(\xi) \quad , \quad \int_S \mathrm{Q}(\mathrm{P}, t)\, \mathrm{dS} = \chi(t)\,, \tag{43}$$

avremo dalla (13)

$$\int_S \mathrm{dS} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2} \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2} \mathrm{d}u = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\gamma}{\lambda_{\mathrm{T}}} \chi(t)\,, \tag{44}$$

e dalla (12) risulterà per la funzione Ψ il valore [3]

$$\Psi(\mathrm{P}, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^{t-(r/a)} \mathrm{d}\eta \int_0^{t+(r/a)} \mathrm{d}\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(r + 2u\sqrt{kt})_{\substack{r=a(\xi-\eta)/2 \\ t=(\xi+\eta)/2}} e^{-u^2} \mathrm{d}u\,. \tag{45}$$

Da questa si ricava

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \Psi = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Bigg\{ & -\frac{1}{r^2} \int_0^{t-(r/a)} \mathrm{d}\eta \int_0^{t+(r/a)} \mathrm{d}\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(r + 2u\sqrt{kt})_{\substack{r=a(\xi-\eta)/2 \\ t=(\xi+\eta)/2}} e^{-u^2} \mathrm{d}u - \\ & - \frac{1}{ar} \int_0^{t+(r/a)} \mathrm{d}\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left(\frac{a}{2}\left(\xi - t + \frac{r}{a}\right) + 2u\sqrt{\frac{k}{2}\left(\xi + t - \frac{r}{a}\right)}\right) e^{-u^2} \mathrm{d}u + \\ & + \frac{1}{ar} \int_0^{t-(r/a)} \mathrm{d}\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left(\frac{a}{2}\left(t + \frac{r}{a} - \eta\right) + 2u\sqrt{\frac{k}{2}\left(t + \frac{r}{a} + \eta\right)}\right) e^{-u^2} \mathrm{d}u \Bigg\} \operatorname{grad} r. \end{aligned} \tag{46}$$

Scomponendo il vettore spostamento $\boldsymbol{u}$ definito dalla (6) nelle due componenti

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}' &= \operatorname{grad} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) + \Delta_2 \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}'' &= \operatorname{grad} \Psi, \end{aligned} \tag{47}$$

in virtù delle (41) e (42) abbiamo

$$\begin{aligned} 4\pi\rho\, \boldsymbol{u}' = {} & \frac{\mathrm{d} \operatorname{grad} 1/r}{\mathrm{dP}} \int_{r/a}^{r/b} \tau\varphi(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau + \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{a^2} \varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} \varphi\left(t - \frac{r}{b}\right)\right] \times \operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} r + \frac{1}{b^2} \frac{1}{r} \varphi\left(t - \frac{r}{b}\right), \end{aligned} \tag{48}$$

(3) In questo caso, trattandosi di una soluzione singolare per $r \to 0$, si può omettere la funzione $\mathrm{W} = \frac{1}{r} \Gamma\left(t - \frac{r}{a}\right)$ considerata nella nota (1).

la quale, in assenza di azioni termiche, generalizza le formule che Love (4) aveva stabilito nel caso in cui la forza di massa ha direzione costante. La $\boldsymbol{u}'' = \operatorname{grad} \Psi$ dà il contributo dovuto alla dilatazione termica.

Infine, poichè analogamente alla (42) si ha ora

$$\Delta_1 \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \frac{1}{r} \varphi\left(t - \frac{r}{a}\right), \tag{49}$$

ed è inoltre

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{P}, t) = \frac{\gamma \mathrm{T}_0}{4\pi a^2 \rho \lambda_{\mathrm{T}}} \cdot \frac{1}{r} \varphi'\left(t - \frac{r}{a}\right), \tag{50}$$

considerando della (32) un integrale dipendente soltanto da r e da t, si trova

$$\boldsymbol{w} = \frac{\gamma \mathrm{T}_0}{4\pi \rho \lambda_{\mathrm{T}}} \frac{1}{r} e^{\frac{a^2}{k}\left(t - \frac{r}{a}\right)} \int_0^{t-(r/a)} e^{-\frac{a^2}{k}\tau} \varphi(\tau)\, d\tau \tag{51}$$

e quindi

$$\mathrm{T}_1 = -\frac{\gamma \mathrm{T}_0}{4\pi \rho \lambda_{\mathrm{T}}} \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{1}{r} + \frac{a}{k}\right) e^{\frac{a^2}{k}\left(t - \frac{r}{a}\right)} \int_0^{t-(r/a)} e^{-\frac{a^2}{k}\tau} \varphi(\tau)\, d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{a} \varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) \right\} \times \operatorname{grad} r\,. \tag{52}$$

Dalle (36) e (37) si deduce poi per la componente T_2 della temperatura il valore

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}\left(r + 2u\sqrt{kt}\right) e^{-u^2}\, du\,, \tag{53}$$

essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}\left(2u\sqrt{kt}\right) e^{-u^2}\, du = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\,\lambda_{\mathrm{T}}} \chi(t)\,, \tag{54}$$

e $\chi(t)$ il limite dell'integrale $\int_S \mathrm{Q}(\mathrm{P}, t)\, d\mathrm{S}$, quando il volume S diventa infinitesimo nell'intorno del punto O.

Confrontando la (54) con la (44) si ha che le funzioni $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ sono legate dalla relazione $\mathfrak{F} = -\gamma \mathrm{G}/\rho$.

(4) A. E. H. Love, *The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium* « Proceedings of the London Mathematical Society », S. 2, V. 1, 1904. Cfr. anche C. Somigliana, *loco citato* nella Nota I.