Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Un apporto alla fenomenologia delle equazioni lineari a derivate parziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.3, p. 290–292.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_3_290_0>

Analisi matematica. — *Un apporto alla fenomenologia delle equazioni lineari a derivate parziali.* Nota [(*)] del Socio MAURO PICONE.

SUMMARY. — A simple unprecedented example is given concerning a linear partial differential equation of *an arbitrary order* in two real independent variables, a solution of which is determined in a suitably given domain, when its value along an arc lying in it is prescribed.

Indicherò con x e y due variabili reali indipendenti e porrò $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, indicherò con a e b due assegnate quantità positive, essendo $b > a$, con $C(a, b)$ la corona circolare del piano (x, y), luogo dei punti, del piano stesso, per i quali

$$a \leqq \rho \leqq b ,$$

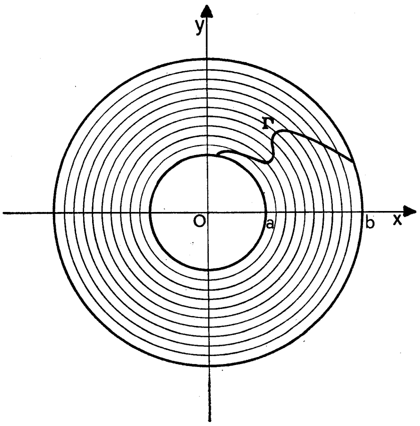
per un asse r del detto piano, spiccato dalla sua origine O, con θ l'anomalia minima di r, rispetto all'asse x, cioè l'angolo, compreso nell'intervallo $(0, 2\pi)$, estremo destro escluso, di cui deve ruotare l'asse x, con fulcro in O, nel verso positivo delle rotazioni, per sovrapporsi sull'asse r, con $\alpha(\rho)$ una funzione di ρ, definita nell'intervallo (a, b), verificante la limitazione

$$0 \leqq \alpha(\rho) < 2\pi ,$$

con Γ la curva di equazione polare

$$\theta = \alpha(\rho) ,$$

la quale risulta tracciata (ved. fig.) nella corona circolare $C(a, b)$, congiungente i punti $[a, \alpha(a)]$ e $[b, \alpha(b)]$ delle circonferenze limitanti la corona ed incontrata in uno ed in un solo punto da ogni circonferenza concentrica alla corona $C(a, b)$ ed in questa contenuta.



Per una funzione $u(x, y)$, continua in $C(a, b)$, con le sue derivate parziali del primo ordine, cioè di classe uno, porrò

$$Du \equiv -y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} ,$$

e, se $u(x, y)$ vi è continua con le sue derivate parziali dei primi n ordini, cioè di classe n, indicherò con $D^n u$ il risultato dell'operazione D ripetuta n

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1971.

successive volte sulla u. In particolare, supposta u di classe due, si ha:

$$D^2 u \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-xy \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

ed, in generale, $D^n u$ risulta una combinazione lineare delle derivate parziali della u, dei primi n ordini, con coefficienti polinomii omogenei, nelle variabili indipendenti x e y, di grado non superiore ad n.

Ciò posto, ecco il fenomeno che mi propongo di mostrare con la Nota presente.

Assegnate, arbitrariamente, una funzione reale $f(x, y)$, continua nella corona circolare $C(a, b)$ e una funzione reale $g(\rho)$, continua nell'intervallo (a, b), qualunque sia l'ordine n dell'equazione a derivate parziali

$$D^n u = f(x, y), \tag{1}$$

non può esistere più di una soluzione dell'equazione stessa che sulla curva Γ assuma valori prescritti $g(\rho)$, che verifichi, cioè, la condizione:

$$u[\rho \cos \alpha(\rho), \rho \operatorname{sen} \alpha(\rho)] = g(\rho), \qquad a \leqq \rho \leqq b. \tag{2}$$

Condizione necessaria affinché esista una tale soluzione della (1) è che si abbia

$$\int_{\alpha(\rho)}^{\alpha(\rho)+2\pi} f[\rho \cos \tau, \rho \operatorname{sen} \tau]\, d\tau \equiv 0, \qquad a \leqq \rho \leqq b. \tag{3}$$

Se $\alpha(\rho)$ e $f(x, y)$ sono di classe n la detta condizione è sufficiente, in particolare è allora sufficiente che l'equazione (1) sia omogenea.

Dimostrazione. Si ha

$$u(x, y) \equiv u(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$$

e, com'è subito visto,

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Porrò

$$u(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) \equiv v(\rho, \theta).$$

Per $n = 1$ l'equazione (1) si scrive

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = f(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta),$$

donde, dovendo essere verificata la (2),

$$v(\rho, \theta) = \int_{\alpha(\rho)}^{\theta} f(\rho \cos \tau, \rho \operatorname{sen} \tau)\, d\tau + g(\rho). \tag{4}$$

Ma deve risultare

$$v[\rho, \alpha(\rho)] \equiv v[\rho, \alpha(\rho) + 2\pi],$$

e quindi necessariamente, la (3). Soddisfatta la quale, con la (4) si ha l'unica possibile soluzione del problema.

Se consideriamo, in generale, l'equazione

$$\text{(5)} \qquad D^{n+1} u = f(x, y), \qquad (n \geqq 1),$$

con n numero naturale non inferiore ad uno. Deve aversi

$$\frac{\partial}{\partial\theta} D^n u = f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta),$$

donde, necessariamente, la (3), che supporremo soddisfatta.

Tutte le soluzioni della (5) sono date dalla formola:

$$v(\rho, \theta) = \int_{\alpha(\rho)}^{\theta} \frac{(\theta - \tau)^n}{n!} f(\rho\cos\tau, \rho\operatorname{sen}\tau)\, d\tau + g(\rho) + \sum_{k=1}^{n} g_k(\rho) \frac{[\theta - \alpha(\rho)]^k}{k!},$$

ove $g(\rho), g_1(\rho), \cdots, g_n(\rho)$, sono funzioni della sola ρ, la $g(\rho)$ essendo assegnata, conformemente alla condizione (2).

Dovrà, però, aversi anche:

$$v[\rho, \alpha(\rho)] \equiv v[\rho, \alpha(\rho) + 2\pi],$$

$$\left[\frac{\partial^\nu v}{\partial\theta^\nu}\right]_{\theta=\alpha(\rho)} \equiv \left[\frac{\partial^\nu v}{\partial\theta^\nu}\right]_{\theta=\alpha(\rho)+2\pi} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

e quindi le $n+1$ equazioni:

$$\text{(6}_0\text{)} \qquad \int_{\alpha(\rho)}^{\alpha(\rho)+2\pi} \frac{[\alpha(\rho) + 2\pi - \tau]^n}{n!} f(\rho\cos\tau, \rho\operatorname{sen}\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{n} g_k(\rho) \frac{(2\pi)^k}{k!} = 0,$$

$$\text{(6}_\nu\text{)} \qquad \int_{\alpha(\rho)}^{\alpha(\rho)+2\pi} \frac{[\alpha(\rho) + 2\pi - \tau]^{n-\nu}}{(n-\nu)!} f(\rho\cos\tau, \rho\operatorname{sen}\tau)\, d\tau + \sum_{k=\nu}^{n} g_k(\rho) \frac{(2\pi)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} = g_\nu(\rho),$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

L'equazione (6_ν) per $\nu = n$, non è che la (3), supposta soddisfatta, essa può dunque esser soppressa dalle (6_ν) e le equazioni (6_0) e (6_ν), per $\nu = 1, 2, \cdots, n-1$, determinano, com'è subito visto, le funzioni $g_1(\rho), g_2(\rho), \cdots, g_n(\rho)$.

Per $n = 2$, l'equazione (1) è lineare del second'ordine di tipo parabolico ed ha per caratteristiche (doppie) le circonferenze contenute nella corona $C(a, b)$ e a questa concentriche. Per quanto è stato, nelle righe precedenti, mostrato, il problema della determinazione delle soluzioni di tale equazione, non ha nulla a che vedere con quello classico per l'equazione del calore, essa pure di tipo parabolico, assunto come modello per le equazioni di tale tipo.