Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Sulla propagazione di onde termoelastiche in un mezzo omogeneo isotropo. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.2, p. 163–171.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_2_163_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Termoelasticità. — *Sulla propagazione di onde termoelastiche in un mezzo omogeneo isotropo.* Nota I (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we consider an elastic homogeneous isotropic indefinite medium, in a region of which general external forces and sources of heat are distributed. With a suitable proceeding we reduced the problem of integration of relative thermoelastic equations to the determination of two vectors, a scalar function and the temperature which satisfy determined differential equations. In the particular case in which the linear thermal coefficient of dilatation is sufficiently small that we can neglect the terms which contain the square of it, we have assigned, of the above equations, any solutions, with definite integrals, by means of known retarded potentials and with the introduction of new functions that we called thermoelastic potentials.

1. In questi ultimi anni hanno assunto uno sviluppo notevole gli studi dell'influenza dei fenomeni termici sul movimento dei corpi elastici e delle relative interazioni, studi richiesti soprattutto dalle esigenze della tecnica aeronautica, da quella dei voli spaziali, dalla costruzione di turbine a gas o a vapore, di motori a reazione, di razzi, di reattori termonucleari, ecc., come pure dalla conoscenza più intima dei fenomeni sismici determinati da perturbazioni termiche nell'interno della Terra, per cui è nato un nuovo ramo della Scienza, la *Termoelasticità*.

Alle equazioni che reggono i fenomeni termoelastici si è pervenuti attraverso ricerche di diversi autori. Una esposizione dello sviluppo storico e analitico di queste ricerche la troviamo in una conferenza del prof. W. Nowacki di Varsavia [1]. La corrispondente teoria, insieme a significative applicazioni, è riportata in un volumetto recente di A. D. Kovalenko [2], e le dette equazioni si ottengono anche come caso particolare delle equazioni della *magnetotermoelasticità* [3], in assenza di azioni elettromagnetiche.

Le equazioni indefinite della termoelasticità sono costituite dall'equazione vettoriale delle vibrazioni elastiche in cui, oltre a forze di massa generiche, compare un termine dipendente dal gradiente di temperatura, e dall'equazione del calore nel caso più generale in cui nel mezzo elastico vi siano delle sorgenti di calore e contenente un termine di accoppiamento fra la deformazione elastica e il campo di temperatura.

In questa Nota ho esposto intanto un procedimento in cui la determinazione dello spostamento $\boldsymbol{u}$ di un punto e della temperatura viene ridotto alla determinazione di due vettori $\boldsymbol{u}_1 , \boldsymbol{u}_2$, e di una funzione scalare Ψ. I due vettori $\boldsymbol{u}_1 , \boldsymbol{u}_2$, dipendono soltanto dalle forze di massa e devono verificare due classiche equazioni differenziali alle derivate parziali del 4° ordine, mentre la funzione Ψ, definita da un'equazione, pure del 4° ordine, ma

(*) Presentata nella seduta del 20 febbraio 1971.

molto più complicata, dipende, oltre che dalle forze di massa, dal calore generato dalle sorgenti.

Particolarmente notevole è il caso in cui il coefficiente di dilatazione termica lineare α è, come generalmente, molto piccolo, tale da poter trascurare i termini che contengono il quadrato di esso. In tal caso l'equazione cui deve soddisfare la funzione Ψ e quella della temperatura T si semplificano notevolmente e il sistema risulta suscettibile di integrazione.

Riferendomi a questo caso e considerando un mezzo elastico indefinito, nell'ipotesi che le forze di massa e le sorgenti di calore siano localizzate in una regione assegnata del mezzo, occupante un volume S, prescindendo dalle oscillazioni libere, assegno intanto mediante integrali definiti, e utilizzando i potenziali ritardati di 2° ordine introdotti da Somigliana [4], i valori dei vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$. Successivamente introducendo, in analogia ai potenziali newtoniani di volume, delle nuove funzioni potenziali, che ho chiamate termoelastiche, ho assegnato anche, mediante integrali definiti, il valore dell'incognita funzione Ψ, riducendo la questione all'inversione di un integrale semplice definito.

2. Il sistema di equazioni che governano il fenomeno della propagazione di onde elastiche e del calore in un mezzo omogeneo isotropo, soggetto a forze esterne generiche e nel quale siano distribuite delle sorgenti di calore, è costituito dalle seguenti equazioni del moto e del calore [1], [2], [3]:

$$\rho\left(\boldsymbol{F}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right)+\mu\Delta_2\,\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}-(3\lambda+2\mu)\,\alpha\cdot\mathrm{grad}\,\mathrm{T}=0 \tag{1}$$

$$\left(\Delta_2-\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{T}-\frac{(3\lambda+2\mu)\,\alpha\mathrm{T}}{\lambda_{\mathrm{T}}}\,\mathrm{div}\,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\mathrm{Q}}{\lambda_{\mathrm{T}}}=0\,, \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è lo spostamento dei punti del mezzo elastico e T la temperatura assoluta, entrambi funzioni del punto P e del tempo t; ρ è la densità del mezzo; λ e μ sono le costanti di Lamé; α è il coefficiente di dilatazione termica lineare; $\boldsymbol{F}$ è la forza agente riferita all'unità di massa; Q il calore generato dalle sorgenti, riferito pure all'unità di massa; λ_{T} è il coefficiente di conduttività termica; infine $k=\lambda_{\mathrm{T}}/(\mathrm{C}_\varepsilon\,\rho)$ è il *coefficiente di diffusività termica*, essendo C_ε il *calore specifico a deformazione costante.*

Indicando ancora con C_σ il calore specifico a sforzi costanti, si dimostra che [2]

$$(3\lambda+2\mu)\,\alpha\mathrm{T}=\frac{\mathrm{C}_\sigma-\mathrm{C}_\varepsilon}{3\alpha}\,, \tag{3}$$

e se la temperatura T oscilla intorno a un valore medio T_0 costante, il secondo membro della (3) si può ritenere costante ed eguale a $(3\lambda+2\mu)\,\alpha\mathrm{T}_0$. Questo equivale a linearizzare nell'equazione (2) il termine di accoppiamento tra lo spostamento $\boldsymbol{u}$ e la temperatura T. Alla (2) possiamo pertanto sostituire la seguente equazione

$$\left(\Delta_2-\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{T}-\frac{(3\lambda+2\mu)\,\alpha\mathrm{T}_0}{\lambda_{\mathrm{T}}}\,\mathrm{div}\,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\mathrm{Q}}{\lambda_{\mathrm{T}}}=0\,. \tag{4}$$

Ponendo ancora

$$(5)\qquad \frac{\mu}{\rho} = b^2 \quad , \quad \frac{\lambda + \mu}{\rho} = a^2 - b^2 \quad , \quad (a > b) \quad ; \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha ,$$

dove a è la velocità delle onde elastiche pure longitudinali e b quella delle onde trasversali, la (1) assume la forma

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \boldsymbol{u} - (a^2 - b^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \frac{\gamma}{\rho} \operatorname{grad} T = \boldsymbol{F}.$$

Per raggiungere lo scopo prefisso poniamo ora

$$(7)\qquad \boldsymbol{u} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 + \Psi) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_2$$

e

$$(8)\qquad \theta_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 \quad , \quad \theta_2 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_2 .$$

Sostituendo nell'equazione (6) del moto abbiamo

$$(9)\qquad \operatorname{grad} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) + \Delta_2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t^2} + b^2 (\operatorname{grad} \Delta_2 \theta_2 - \Delta_2 \Delta_2 \boldsymbol{u}_2) -$$

$$- a^2 \operatorname{grad} (\Delta_2 \theta_1 + \Delta_2 \Psi) + \frac{\gamma}{\rho} \operatorname{grad} T = \boldsymbol{F}.$$

Per soddisfare questa equazione poniamo

$$(10)\qquad \Delta_2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \Delta_2 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{F},$$

e allora dobbiamo avere

$$(11)\qquad \operatorname{grad} \left[\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - a^2 (\Delta_2 \theta_1 + \Delta_2 \Psi) \right] =$$

$$= \operatorname{grad} \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \theta_2 - \frac{\gamma}{\rho} T \right).$$

Questa a sua volta si può soddisfare ponendo

$$(12)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\theta_1 + \Psi) - a^2 \Delta_2 (\theta_1 + \Psi) = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \theta_2 - \frac{\gamma}{\rho} T.$$

Fisseremo ora che la funzione θ_1 sia legata alla funzione θ_2 dalla relazione

$$(13)\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \right) \theta_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \right) \theta_2 ,$$

e allora la (12) porge

$$(14)\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \right) \Psi + \frac{\gamma}{\rho} T = 0 .$$

Per quanto riguarda l'equazione (13), osserviamo che prendendo la divergenza di ambo i membri della (10) si ha

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \right) \Delta_2 \theta_2 = \operatorname{div} \boldsymbol{F}.$$

Applicando allora ad ambo i membri della (13) l'operatore Δ_2 di Laplace, segue che si deve avere

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \Delta_2 \theta_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{F}.$$

Essendo $\theta_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1$, quest'ultima relazione ci autorizza a porre, in conformità della (10),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \Delta_2 \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{F}. \tag{15}$$

Osserviamo ancora che dalle (7) e (8) si ricava

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \Delta_2 (\theta_1 + \Psi) \tag{16}$$

e pertanto l'equazione (4) del calore diventa

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right) T - \frac{\gamma T_0}{\lambda_T} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 (\theta_1 + \Psi) + \frac{Q}{\lambda_T} = 0. \tag{17}$$

Possiamo ora eliminare dalla (14) la temperatura T applicando ad ambo i membri l'operatore $\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}$, e tenendo conto della (17). Si ha così per la funzione Ψ la seguente equazione

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \Psi + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho \lambda_T} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \Psi = \tag{18}$$
$$= \frac{\gamma}{\rho} \frac{Q}{\lambda_T} - \frac{\gamma^2 T_0}{\rho \lambda_T} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \theta_1 .$$

La questione è in tal modo ridotta a determinare i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, mediante le equazioni (15) e (10). Dopo ciò si ha anche $\theta_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1$, e quindi la (18) definisce la funzione Ψ. Infine dalla (17) si ha la temperatura T.

3. È opportuno osservare che se prendiamo il rotore di ambo i membri della (6), e poniamo $\omega = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, abbiamo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2\right) \omega = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \tag{19}$$

e quindi la rotazione dei punti del mezzo elastico è indipendente dalla temperatura e dalla distribuzione del calore.

Se prendiamo invece la divergenza di ambo i membri della (6), e indichiamo con $\theta = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$ il coefficiente di dilatazione cubica, abbiamo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \theta = \operatorname{div} \boldsymbol{F} - \frac{\gamma}{\rho} \Delta_2 T. \tag{20}$$

Applicando a questa l'operatore $\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right)$, e ricordando la (4), si ha

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \theta + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho \lambda_T} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \theta = \tag{21}$$
$$= \left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \frac{\gamma}{\rho \lambda_T} \Delta_2 Q$$

che è l'equazione alla quale soddisfa il coefficiente di dilatazione cubica θ, il cui primo membro è della stessa forma del primo membro della (18).

Un'equazione analoga si può avere per la temperatura T. Invero dalla (4) si ricava

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda_T}{\gamma T_0} \left[\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right) T + \frac{Q}{\lambda_T} \right]. \tag{22}$$

Derivando allora la (20) rispetto a t, e sostituendo la (22), si ha l'equazione

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \right) \left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right) T + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho \lambda_T} \Delta_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \\ = \frac{\gamma T_0}{\lambda_T} \operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \right) \frac{Q}{\lambda_T} \end{aligned} \tag{23}$$

il cui primo membro ha sostanzialmente la stessa struttura di quelli delle equazioni (18) e (21).

4. Particolarmente interessante è il caso in cui il coefficiente di dilatazione termica lineare α è molto piccolo (come è generalmente), per cui nelle equazioni precedenti si possono trascurare i termini in α^2 in confronto dei rimanenti.

In questo caso, ricordando che γ è proporzionale ad α, la (18) si semplifica notevolmente e si è condotti così a considerare il seguente sistema di equazioni indipendenti:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \right) \Delta_2 \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{F}(P, t) \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \right) \Delta_2 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{F}(P, t) \tag{25}$$

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \right) \Psi = \frac{\gamma}{\rho \lambda_T} Q, \tag{26}$$

in cui sono incogniti i vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, e la funzione Ψ.

L'equazione (26) mostra che essa ammette un integrale proporzionale a γ e quindi ad α. Allora, se ci limitiamo a considerare gli integrali particolari delle equazioni *non omogenee*, trascurando gli integrali che si hanno in assenza di forze esterne e di sorgenti di calore, l'equazione (14) si riduce alla

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right) T = \frac{\gamma T_0}{\lambda_T} \Delta_2 \operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} - \frac{Q}{\gamma_T}. \tag{27}$$

La questione in questo caso è ridotta all'integrazione delle equazioni (24), (25), (26) e (27).

Supponiamo ora che le forze $\boldsymbol{F}$ e le sorgenti Q di valore siano distribuite in una regione S del mezzo elastico, il quale nel resto sia indefinito, e proponiamoci di determinare degli integrali delle equazioni (24)–(26).

Osserviamo intanto che un integrale dell'equazione

$$(28)\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\,\Delta_2\right)\Delta_2\,\boldsymbol{v} = 0\,,$$

che dipenda soltanto dalla distanza r del punto P dal punto M, e dal tempo t, si ottiene integrando l'equazione

$$(29)\qquad \Delta_2\,\boldsymbol{v} \equiv \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,(r\boldsymbol{v}) = \frac{1}{r}\,\boldsymbol{w}\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

essendo $\boldsymbol{w}$ un vettore arbitrario dell'argomento $t - \dfrac{r}{a}$.

Con due integrazioni rispetto ad r si ricava così:

$$(30)\qquad \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\int\limits_0^r \mathrm{d}r \int\limits_0^r \boldsymbol{w}\left(t - \frac{r}{a}\right)\mathrm{d}r\,.$$

Introducendo ora con Somigliana [4], i potenziali ritardati di 2º ordine, definiti dalla relazione

$$(31)\qquad \boldsymbol{V}(\mathrm{P}\,,t) = \int\limits_{\mathrm{S_M}} \boldsymbol{v}\,(t\,,r)\,\mathrm{dS_M}\,,$$

dove l'integrazione è fatta rispetto al punto M variabile nel volume S, si ha subito, ricordando la (29),

$$(32)\qquad \Delta_2\,\boldsymbol{V} = \int\limits_{\mathrm{S_M}} \boldsymbol{w}\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{\mathrm{dS_M}}{r}\,,$$

che è valida in tutto lo spazio, mentre come ha dimostrato Somigliana, il vettore $\boldsymbol{V}(\mathrm{P}\,,t)$, definito dalla (31), nello spazio interno al volume S verifica l'equazione

$$(33)\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\,\Delta_2\right)\Delta_2\,\boldsymbol{V} = 4\,\pi a^2\,\boldsymbol{w}\,(t)\,,$$

e nello spazio esterno l'equazione omogenea corrispondente.

In base a queste considerazioni si ha che le equazioni (24) e (25) ammettono gli integrali

$$(34)\qquad \boldsymbol{u}_1(\mathrm{P}\,,t) = \frac{1}{4\,\pi a^2}\int\limits_{\mathrm{S_M}} \frac{\mathrm{dS_M}}{r}\int\limits_0^r \mathrm{d}r\int\limits_0^r \boldsymbol{F}\left(\mathrm{M}\,,t - \frac{r}{a}\right)\mathrm{d}r$$

$$(35)\qquad \boldsymbol{u}_2(\mathrm{P}\,,t) = \frac{1}{4\,\pi b^2}\int\limits_{\mathrm{S_M}} \frac{\mathrm{dS_M}}{r}\int\limits_0^r \mathrm{d}r\int\limits_0^r \boldsymbol{F}\left(\mathrm{M}\,,t - \frac{r}{b}\right)\mathrm{d}r\,,$$

dove $\mathrm{S_M}$ è il volume descritto dal punto M, nel quale agiscono le forze $\boldsymbol{F}$.

Alquanto più difficile si presenta ora la ricerca di un integrale dell'equazione (26). Per raggiungere questo scopo poniamo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \Psi = \mathrm{U} \tag{36}$$

e allora la (26) diventa

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathrm{U} = \frac{\gamma}{\rho \lambda_{\mathrm{T}}} \mathrm{Q}(\mathrm{P}, t). \tag{37}$$

Un integrale dell'equazione omogenea

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathrm{V} = 0, \tag{38}$$

dipendente dalla distanza r del punto P dal punto M, e dal tempo t, come si sa dalla teoria del calore è della forma $\mathrm{V} = \Phi(t, r)/r$, con

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r + 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2} \, du, \tag{39}$$

dove f è una funzione arbitraria dell'argomento indicato tra parentesi, la quale rappresenta il valore di Φ per $t = 0$.

Cerchiamo ora un integrale dell'equazione

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \mathrm{W} = \mathrm{V}(t, r) = \frac{1}{r} \Phi(t, r) \tag{40}$$

funzione di t e di r soltanto. Un tale integrale è soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 (r\mathrm{W})}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 (r\mathrm{W})}{\partial r^2} = \Phi(t, r) \tag{41}$$

e risulta

$$\mathrm{W}(t, r) = \frac{1}{4r} \int_0^{t-(r/a)} d\eta \int_0^{t+(r/a)} \Phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}, a\frac{\xi - \eta}{2}\right) d\xi. \tag{42}$$

Sostituendo in luogo di $\Phi(t, r)$ il valore (39), si ottiene

$$\mathrm{W}(t, r) = \frac{1}{4r\sqrt{\pi}} \int_0^{t-(r/a)} d\eta \int_0^{t+(r/a)} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(a\frac{\xi - \eta}{2} + 2u\sqrt{k\frac{\xi + \eta}{2}}\right) e^{-u^2} \, du \tag{43}$$

la quale, in virtù della (40) e della (38), soddisfa l'equazione

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \mathrm{W} = 0. \tag{44}$$

Se ora introduciamo la funzione

$$\Psi(P, t) = \int_{S_M} W(t, r) \, dS_M = \tag{45}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{S_M} \frac{dS_M}{r} \int_0^{t-(r/a)} d\eta \int_0^{t+(r/a)} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(M, a\frac{\xi-\eta}{2} + 2u\sqrt{k\frac{\xi+\eta}{2}}\right) e^{-u^2} du$$

che, in analogia ai potenziali newtoniani chiameremo *potenziale termoelastico*, per la (40) risulta

$$U = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{S_M} \frac{dS_M}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f(M, r + 2u\sqrt{kt}) \, e^{-u^2} du, \tag{46}$$

e questo risultato è valido in tutto lo spazio.

Ora, come nella teoria degli ordinari potenziali ritardati si ha che l'integrale

$$\varphi(P, t) = \int_{S_M} \chi\left(M, t - \frac{r}{a}\right) \frac{dS}{r}$$

verifica l'equazione di Lorentz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \varphi = 4\pi a^2 \chi(P, t),$$

in modo analogo si può dimostrare che la funzione $U(P, t)$ definita dalla (46), nei punti interni al volume S soddisfa l'equazione

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right) U = -4\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(P, 2u\sqrt{kt}) \, e^{-u^2} du. \tag{47}$$

e quindi la funzione Ψ espressa dalla (45), verifica l'equazione

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \Psi = -4\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(P, 2u\sqrt{kt}) \, e^{-u^2} du, \tag{48}$$

mentre nei punti esterni ad S si ha

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) \Psi = 0. \tag{49}$$

Dal confronto della (48) con la (26), segue che se si determina la funzione $f(P, 2u\sqrt{kt})$ in modo che risulti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(P, 2u\sqrt{kt}) \, e^{-u^2} du = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\gamma}{\rho\lambda_T} Q(P, t), \tag{50}$$

la funzione Ψ espressa dalla (45) nei punti interni al volume S verifica l'equazione (26) e nei punti esterni la (49).

La questione è dunque ridotta all'inversione dell'integrale (50).

Una volta determinati i vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, e la funzione Ψ, si hanno anche le funzioni $\theta_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1$, $\theta_2 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_2$, e quindi infine dalla (27) si ricava la temperatura T, nello stesso modo con cui dalla (37) si è ricavata la funzione U.

In una prossima Nota daremo i valori espliciti dello spostamento $\boldsymbol{u}$ e della temperatura T, nonché i valori che queste quantità assumono quando il volume S, in cui sono distribuite le forze di massa e le sorgenti di calore, diventa evanescente nell'intorno di un punto.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. NOWACKI, *Nouveaux courants dans les recherches portant sur la Thermoélasticité*, «Accademia Polacca di Scienze e Lettere», Biblioteca di Roma, fasc. 21, 1963.

[2] A. D. KOVALENKO, *Thermoelasticity*, Chap. I, Volters Noordhoff Publishing, Groningen 1969.

[3] C. AGOSTINELLI, *Sulla formulazione variazionale delle equazioni della magneto-termoelasticità*. (In scritti offerti per onorare la memoria di Fernando Gianardi).

[4] C. SOMIGLIANA, *Sulla propagazione delle onde nei mezzi isotropi*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», *41* (1905).