Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

François Sigrist

H-applications d'une sphère dans une sphère

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.2, p. 128–130.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_2_128_0>

Topologia. — *H–applications d'une sphère dans une sphère.* Nota (*) di François Sigrist, presentata dal Socio B. Segre.

Riassunto. — Si classificano le H–applicazioni fra sfere, considerando come equivalenti due applicazioni che siano omotope con conservazione dell'unità rispetto alla moltiplicazione.

Introduction

Les sphères S^1, S^3 et S^7 sont les seules admettant une multiplication avec unité [1]. Deux multiplications sur une sphère S^m sont équivalentes si elles sont homotopes comme applications $S^m \times S^m \to S^m$, par une homotopie conservant l'unité de la multiplication. Nous ne considérerons que des applications continues pointées entre les sphères, le point–base étant l'unité de la multiplication. Il existe 1 classe de multiplications sur S^1, 12 sur S^3 et 120 sur S^7 [2]. Une application f: $S^i \to S^q$ sera dite homomorphe (ou H–application) s'il existe des multiplications m et m' sur S^i resp. S^q telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd} S^i \times S^i \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f\times f"] & S^i \arrow[d, "f"] \\ S^q \times S^q \arrow[r, "m'"] & S^q \end{tikzcd}$$

soit homotopiquement commutatif. Cette propriété ne dépend que de la classe d'homotopie de f. Une application homotope à l'application triviale est toujours une H–application; nous étudierons donc les groupes $\pi_i(S^q)$ différents du groupe trivial. Ceux–ci sont dans notre cas

(i) $\pi_1(S^1) \simeq \mathbf{Z}$ de générateur ι_1
(ii) $\pi_3(S^3) \simeq \mathbf{Z}$ de générateur ι_3
(iii) $\pi_7(S^7) \simeq \mathbf{Z}$ de générateur ι_7
(iv) $\pi_7(S^3) \simeq \mathbf{Z}_2$ de générateur $\alpha = \nu' \circ \eta_6 = \eta_3 \circ \nu_4$ [Toda] p. 43–44.

L'objet de ce travail est d'établir la liste des H–applications $S^i \to S^q$, en démontrant le

Théorème:

(i) $n\iota_1$ *est toujours homomorphe,*
(ii) $n\iota_3$ *est homomorphe si et seulement si* $n(n^2 - 1) \equiv 0 \pmod 8$,
(iii) $n\iota_7$ *est homomorphe si et seulement si* $n(n^4 - 1) \equiv 0 \pmod{16}$,
(iv) α *n'est pas homomorphe.*

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 giugno 1970.

Démonstration du théorème

(i) On sait que l'opération d'addition de $\pi_i(S^q)$ peut être réalisée par multiplication des valeurs, dans le cas où S^q est un H–espace. S^1 pouvant être munie d'une structure de groupe commutatif, le résultat est trivial.

(ii) La démonstration se trouve essentiellement dans Arkowitz–Curjel [3]. On déduit en effet du théorème A de [3] le résultat: $n\iota_3$ est homomorphe si et seulement s'il existe deux entiers t et r tels que $n^2(2t+1) \equiv n(2r+1)$ (mod 24). Il est facile de voir que cette propriété est équivalente à $n(n^2-1) \equiv 0$ (mod 8).

(iii) On sait que $\pi(S^7 \times S^7, S^7)$ est un groupe [4]. Il est donc possible de reprendre complètement l'argument de [3]: $n\iota_7$ est homomorphe si et seulement s'il existe t et r tels que $n^2(2t+1) \equiv n(2r+1)$ (mod 240). Or, cette condition est équivalente à $n(n^4-1) \equiv 0$ (mod 16).

(iv) Si l'application essentielle: $S^7 \to S^3$ est homomorphe, la construction de Hopf, appliquée au diagramme d'homomorphie, fournit le diagramme homotopiquement commutatif:

$$\begin{array}{ccc} S^{15} & \xrightarrow{H(m)} & S^8 \\ {\scriptstyle \alpha*\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\alpha} \\ S^7 & \xrightarrow{H(m')} & S^4 \end{array}$$

$H(m)$ et $H(m')$ sont des éléments d'invariant de Hopf 1, puisque m et m' sont des multiplications. L'application $\alpha*\alpha$ est évidemment triviale [5], puisqu'elle se décompose en $S^{15} \to S^{11} \to S^7$. Nous allons montrer que $\Sigma\alpha \circ H(m) \neq 0$, ce qui démontrera (iv). Nous nous servirons des propriétés suivantes des groupes d'homotopie des sphères (notations de [Toda]).

a) $H(m)$ est d'invariant de Hopf 1, donc égal à $\sigma_8 + k\Sigma\delta$; k est entier, δ engendre $\pi_{14}(S^7)$, et $15\,\delta = \sigma'$

b) $\eta_7 \circ \Sigma\delta = \eta_7 \circ \Sigma\sigma' = \Sigma(\eta_6 \circ \sigma') = \Sigma(4\bar{\nu}_6) = 4\bar{\nu}_7 = 0$ [Toda] p. 64

c) $\eta_7 \circ \sigma_8 = \sigma' \circ \eta_{14} + \bar{\nu}_7 + \varepsilon_7$ [Toda] p. 64

d) $\Sigma\nu' \circ \sigma' = 2\Sigma\varepsilon'$ Mimura–Toda [6]

e) $\Sigma\nu' \circ \bar{\nu}_7 = \Sigma(\nu' \circ \bar{\nu}_6) = \Sigma(\varepsilon_3 \circ \nu_{11}) = \varepsilon_4 \circ \nu_{12}$ [Toda] p. 68

f) $\Sigma\nu' \circ \varepsilon_7$ et $\varepsilon_4 \circ \nu_{12}$ engendrent chacun un sous–groupe direct de $\pi_{15}(S^4)$; $\Sigma\nu' \circ \varepsilon_7 + \varepsilon_4 \circ \nu_{12}$ est donc non–trivial. [Toda] p. 66.

Le calcul de $\Sigma\alpha \circ H(m)$ devient

$$\Sigma\alpha \circ H(m) \underset{(a)}{=} \Sigma\nu' \circ \eta_7 \circ \sigma_8 + k\Sigma\nu' \circ \eta_7 \circ \Sigma\delta \underset{(b)}{=} \Sigma\nu' \circ \eta_7 \circ \sigma_8 \underset{(c)}{=} \Sigma\nu' \circ \sigma' \circ \eta_{14} +$$
$$+ \Sigma\nu' \circ \bar{\nu}_7 + \Sigma\nu' \circ \varepsilon_7 \underset{(d)}{=} \Sigma\nu' \circ \bar{\nu}_7 + \Sigma\nu' \circ \varepsilon_7 \underset{(e)}{=} \varepsilon_4 \circ \nu_{12} + \Sigma\nu' \circ \varepsilon_7 \underset{(f)}{\neq} 0 \qquad \text{Cqfd.}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. ADAMS, *On the non–existence of elements of Hopf invariant one*, « Bull. AMS », *64* (1958), 279–282.

[2] I. M. JAMES, *Multiplications on spheres (II)*, « Trans. AMS », *84* (1957), 545–558.

[3] M. ARKOWITZ e C. R. CURJEL, *Some properties of the exotic multiplications on the three–sphere*, « Quart. J. Math. Oxford » (2), *20* (1969), 171–176.

[4] P. J. HILTON, *Note on H–spaces and nilpotency*, « Bull. Acad. Polon. », *11* (1963), 505.

[5] M. G. BARRATT e P. J. HILTON, *On join operations in homotopy groups*, « Proc. London Math. Soc. (3), *3* (1953), 430–445.

[6] M. MIMURA e H. TODA, *Homotopy groups of* SU (3), SU (4) *and* S*p* (2), « J. Math. Kyoto Univ. », *3–2* (1964), 217–250.

[Toda] H. TODA, *Composition methods in homotopy groups of spheres*, Princeton University Press (1962).