ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

SILVIO GRECO

Sulla nozione di preschema henseliano

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.2, p. 118–121.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_2_118_0>

Geometria algebrica. — *Sulla nozione di preschema henseliano* (*). Nota di SILVIO GRECO, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this Note we state the bases of a theory of henselian preschemes, similar to the theory of formal preschemes. The definition of affine henselian scheme (and hence of henselian prescheme) is quite natural, but becomes meaningful only after proving a suitable sheaf axiom (§ 2), which can be generalized to sheaves associated with modules (§ 3). A brief discussion of henselization of a prescheme along a closed subprescheme concludes the paper (§ 4).

§ 1. INTRODUZIONE

In questa Nota si pongono le basi di una teoria dei preschemi henseliani sotto molti aspetti analoga a quella dei preschemi formali, ideata da Zariski in [13], e successivamente sviluppata da Serre (cfr. [11]) e da Grothendieck (cfr. ad esempio [6] § 10 e [7], §§ 4, 5).

Nel § 2 si dà la definizione di schema henseliano affine e di preschema henseliano che appare più naturale. Tale definizione ha però significato solo se si dimostra che il prefascio di anelli $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ (cfr. § 2) è un fascio. Ciò è stabilito nel teorema 1, e viene generalizzato ai moduli nel successivo § 3. La Nota termina con la nozione di henselizzazione di un preschema lungo un sottopreschema chiuso (§ 4).

Le dimostrazioni vengono qui omesse o soltanto accennate, ma appariranno in lavori successivi.

§ 2. SCHEMI HENSELIANI AFFINI E PRESCHEMI HENSELIANI

Sia $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ una coppia henseliana (o H–coppia, cfr. [3] o [10], § 11) e sia $\mathfrak{X} = \mathrm{spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m})$. È noto che gli aperti $\mathfrak{D}(f) = \{x \in \mathfrak{X} \mid f \notin \mathfrak{p}_x\}$ formano una base di $\mathfrak{X}$. Per ogni $f \in \mathrm{A}$ poniamo

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D}(f)) = {}^h\mathrm{A}_f$$

dove ${}^h\mathrm{A}_f$ è l'henselizzato dell'anello A_f rispetto all'ideale $\mathfrak{m}\mathrm{A}_f$ (cfr. [3], § 1, oppure [10] § 11). Dal teorema 1 di [12] (o da [10], § 11) segue facilmente che $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ è un prefascio di anelli su $\mathfrak{X}$. Vale inoltre il seguente:

TEOREMA 1. – *Con le precedenti posizioni si ha*:

a) *$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ è un fascio.*

b) *Per ogni $f \in \mathrm{A}$ l'omomorfismo canonico ${}^h\mathrm{A}_f \to \Gamma(\mathfrak{D}(f), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ è un isomorfismo. In particolare $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \cong \mathrm{A}$.*

c) *Per ogni $x \in \mathfrak{X}$ l'anello $\mathcal{O}_x$ è locale, e il suo corpo residuo coincide con $k(x)$.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R.

(**) Nella seduta del 20 febbraio 1971.

Dimostrazione (cenni). L'asserzione a) segue dalla b), mentre la c) è una facile conseguenza delle definizioni. Per provare la b) si può supporre $f = 1$, e si considerano vari casi successivi.

1) A *è un dominio eccellente* ([8], p. 214, def. 7.8.2). In tal caso A è algebricamente chiuso in $\hat{A} = (A, \mathfrak{m})^{\wedge}$ ([5], teor. 1), e la tesi segue dall'analogo risultato valido per gli schemi formali affini ([6], p. 181, prop. 10.1.3).

2) A *è un anello eccellente ridotto*. In questo caso A è integralmente chiuso in $\hat{A}$ ([10], p. 126, teor. 3 oppure [5], cor. 2); ciò permette di ricondursi al caso 1), quozientando per i primi minimali di A, e usando il fatto che l'henselizzazione passa al quoziente ([12], cor. 1 al teor. 1) ed è piatta ([2], oppure [3], th. 6.5).

3) A *è un anello eccellente qualsiasi*. Questo caso si può ricondurre al precedente mediante considerazioni sui primi associati al nilradicale.

4) *Caso generale*. Segue facilmente dal precedente, in quanto ogni H–coppia è limite diretto di H–coppie eccellenti ([4], teor. 5.9).

DEFINIZIONE 1. Lo spazio anulato $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ precedentemente costruito si chiama *spettro henseliano della* H–*coppia* $(A, \mathfrak{m})$, e si indica con $\mathrm{Sph}(A, \mathfrak{m})$, o semplicemente con $\mathrm{Sph}(A)$ se l'ideale $\mathfrak{m}$ è sottinteso. Ogni spazio anulato che sia isomorfo allo spettro henseliano di una H–coppia dicesi *schema henseliano affine*. Un *preschema henseliano* è uno spazio anulato che sia localmente uno schema henseliano affine.

DEFINIZIONE 2. Un *morfismo* di preschemi henseliani è un morfismo di spazi anulati, che induce omomorfismi locali nelle fibre (cfr. teor. 1, c)). È chiaro che con questa definizione di morfismi, i preschemi henseliani formano una categoria $\mathfrak{H}$ che contiene la categoria dei preschemi come sottocategoria piena.

Osservazione. Per poter dare la nozione di *morfismo separato*, e quindi anche *schema henseliano* bisogna provare che la categoria $\mathfrak{H}$ è dotata di prodotti fibrati. Riteniamo molto probabile che tale fatto sia vero.

§ 3. FASCIO ASSOCIATO AD UN MODULO

Siano $(A, \mathfrak{m})$ una H–coppia, $\mathfrak{X} = \mathrm{Sph}(A, \mathfrak{m})$ e M un A–modulo. Ad M si può associare un prefascio **M** di $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$–moduli ponendo

$$\mathbf{M}(\mathfrak{D}(f)) = M \otimes_A {}^h A_f \qquad \forall f \in A .$$

Vale il seguente:

TEOREMA 2. – *Con le posizioni precedenti si ha*:

a) **M** *è un fascio.*

b) *Per ogni* $f \in A$ *l'omomorfismo canonico* $M \otimes_A {}^h A_f \to (\mathfrak{D}(f), \mathbf{M})$ *è un isomorfismo. In particolare* $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$

c) *Per ogni* $x \in \mathfrak{X}$ *si ha un isomorfismo canonico* $\mathbf{M}_x \cong M \otimes_A \mathcal{O}_x$.

Dimostrazione (cenni). Come per il teorema 1 basta provare la b). Se M è un ideale di A la tesi segue dal teorema 1, e dalla piattezza dell'henselizzazione. Il caso generale si può dedurre dal precedente mediante il cosiddetto « principio di idealizzazione » ([9], p. 2).

Osservazione. È chiaro che $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = \mathbf{A}$.

Dal teorema di piattezza segue facilmente il seguente

TEOREMA 3. – *La corrispondenza* M $\mapsto$ **M** *è un funtore esatto e fedele della categoria degli* A–*moduli nella categoria degli* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$–*moduli.*

COROLLARIO. *Ogni fascio del tipo* **M** *è quasi coerente* ([6], p. 45, 5.1.3).

§ 4. HENSELIZZAZIONE DI UN PRESCHEMA LUNGO UN SOTTOPRESCHEMA CHIUSO

Siano X un preschema e Y un sottopreschema chiuso di X, definito dall'ideale quasicoerente $\mathfrak{I}$ di $\mathcal{O}_X$ ([6], p. 119 e seguenti). Per ogni aperto affine U di X, l'aperto $V = U \cap Y$ è affine; inoltre se $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ e $\mathfrak{m} = \Gamma(U, \mathfrak{I})$ si ha: U = spec (A) e V = spec (A/$\mathfrak{m}$). Il funtore $V \to {}^h(A, \mathfrak{m})$ definisce su Y un prefascio di anelli, che è un fascio in virtù del teorema 1. Tale fascio dota Y di una struttura di preschema henseliano, che denoteremo con ${}^h(X, Y)$ (o semplicemente con ${}^hX$ se Y è sottinteso).

DEFINIZIONE 3. Il preschema henseliano ${}^h(X, Y)$ si chiama *henselizzazione di* X *lungo* Y.

È chiaro che se X = spec (A) e Y = V ($\mathfrak{a}$) si ha: ${}^h(X, Y) = \mathrm{Sph}\, {}^h(A, \mathfrak{a})$.

TEOREMA 4. – *Siano* X *un preschema,* Y *un sottopreschema chiuso di* X *e* $\mathfrak{X} = {}^h(X, Y)$. *Allora si ha*

a) *Esiste un morfismo canonico* $f : \mathfrak{X} \to X$.

b) f *induce un omeomorfismo degli spazi topologici soggiacenti a* $\mathfrak{X}$ *e* Y.

c) f *è piatto.*

Osservazione. L'henselizzazione lungo un sottopreschema chiuso gode probabilmente di molte buone proprietà, in gran parte simili a quelle dei completamenti formali, anche senza l'ipotesi di noetherianità locale, che sembra indispensabile in questa teoria (cfr. [6], p. 194 e seguenti). Ciò è dovuto alle buone proprietà di cui gode l'henselizzazione di un anello, come ad esempio la piattezza e la permanenza della normalità (cfr. [3], th. 6.5 e cor. 7.6), che non sempre sono valide per i completamenti $\mathfrak{m}$–adici, usati per i preschemi formali (cfr. ad esempio [1], p. 120, esempio 14, b) e [9], pp. 208–209).

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI N., *Algèbre Commutative*, Cap. III e IV, Hermann, Paris 1961.
[2] GRECO S., *Piattezza della chiusura henseliana*, « Rendiconti Acc. Naz. Lincei », *43* (1967), 329–331.
[3] GRECO S., *Henselization of a ring with respect to an ideal*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *114* (1969), 43–65.
[4] GRECO S., *Sugli omomorfismi quasi étale e gli anelli eccellenti* (in preparazione).
[5] GRECO S., *Una generalizzazione del lemma di Hensel* (in preparazione).
[6] GROTHENDIECK A., *Eléments de Géometrie Algébrique*, Cap. I, « Publ. Math. », *4*, IHES (1960).
[7] GROTHENDIECK A., *Eléments de Géometrie Algébrique*, Cap. III, « Publ. Math. », *11*, IHES (1961).
[8] GROTHENDIECK A., *Eléments de Géometrie Algébrique*, Cap. IV, 2e partie, « Publ. Math. », *24*, IHES (1964).
[9] NAGATA M., *Local Rings*, Interscience Publ. 1962.
[10] RAYNAUD M., *Anneaux Locaux Henseliéns*, Lecture Notes in Math., n. 169, Springer-Verlag 1970.
[11] SERRE J. P., *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique*, « Ann. Inst. Fourier », VI (1955–56), 1–42.
[12] VALABREGA P., *Anelli henseliani topologici* (in preparazione).
[13] ZARISKI O., *Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground field*, « Mem. Amer. Math. Soc. », *5* (1951).