
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LAMBERTO CATTABRIGA

**Sulle soluzioni in tutto lo spazio di certe equazioni a
derivate parziali**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 50 (1971), n.2, p. 108–113.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_2_108_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni differenziali. — *Sulle soluzioni in tutto lo spazio di certe equazioni a derivate parziali* (*). Nota di LAMBERTO CATTABRIGA, presentata (**) dal Corrisp. G. CIMMINO.

SUMMARY. — Regularity and existence of solutions in the whole n -dimensional euclidean space of a class of partial differential equations are studied.

Presentiamo qui alcuni risultati riguardanti le soluzioni in tutto lo spazio euclideo reale n -dimensionale E^n , $n \geq 2$, di equazioni a derivate parziali a coefficienti complessi costanti di un tipo più generale di quelli considerati nel n. 7 di [2].

Indichiamo con S^n , $n \geq 2$, lo spazio vettoriale n -dimensionale avente per elementi i multi-indici $s = (s_1, \dots, s_n)$ a coordinate s_j , $j = 1, \dots, n$, reali. Con e indichiamo l'elemento di S^n avente tutte le coordinate eguali ad uno e con e^j l'elemento di S^n con $e_h^j = 0$ per $h \neq j$ ed $e_j^j = 1$. Se $s \in S^n$ ha coordinate intere non negative porremo $\partial^s = \partial^{|s|} / \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $|s| = s_1 + \dots + s_n$ e $D^s = (-i)^{|s|} \partial^s$.

Sia $P(D) = \sum_s a_s D^s$ un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti. Con la denominazione di [5] e [7] chiameremo poliedro caratteristico di $P(D)$ l'involuppo convesso in S^n dell'insieme $\{s \in S^n; a_s \neq 0\} \cup \{0\}$. Supporremo che $P(D)$ soddisfi alla

CONDIZIONE K.

i) il poliedro caratteristico $\mathbf{P}$ di $P(D)$ sia tale che

$$\forall j = 1, \dots, n \quad m_j = \max \{ \rho \geq 0; \rho e^j \in \mathbf{P} \} > 0,$$

ii) esistano due costanti $C > 0$ ed $R \geq 0$ tali che

$$|P(\xi)| \geq C \sum_{l=2}^{N(\mathbf{P})} |\xi^{s^l}| \quad (1) \quad \forall \xi \in E^n, |\xi| > R$$

ove s^l , $l = 2, \dots, N(\mathbf{P})$, indicano i vertici di $\mathbf{P}$ diversi dall'origine 0 di S^n .

Uno studio dei polinomi differenziali soddisfacenti alla K è stato iniziato da L. R. Volevič-S. G. Gindikin [7]. I risultati che qui esponiamo si ottengono utilizzando quanto provato in [1] e [2]. Una parte di essi costituisce una estensione dei risultati del n. 7 di [2]. Salvo alcune varianti esplicitamente indicate, le notazioni qui usate sono quelle di [1] e [2].

(*) Lavoro eseguito con contributo del CNR.

(**) Nella seduta del 20 febbraio 1971.

(1) Se $s \in S^n$ si pone $|\xi^s| = \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{s_j}$.

1. Si vede facilmente che le proposizioni provate nel n. 1 di [1], in particolare il lemma 1.6 da cui esse dipendono, continuano a sussistere se con $\mathfrak{D}_{L_p, \alpha}$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha \geq 0$, si intende, anzichè lo spazio là così indicato, lo spazio vettoriale costituito da tutte le funzioni ζ a valori complessi indefinitamente differenziabili in E^n e tali che

$$\|\partial^{\mathbf{r}} \zeta\|_{L_p(E^n), \alpha} = \left\{ \int_{E^n} |\partial^{\mathbf{r}} \zeta|^p \prod_{j=1}^n (1 + |x_j|)^{\alpha p} dx \right\}^{1/p} < \infty,$$

per ogni multi-indice $\mathbf{r}$ di interi non negativi. In tale spazio si considera la topologia definita dalla famiglia di seminorme: $\sup_{|\mathbf{r}| \leq m} \|\partial^{\mathbf{r}} \zeta\|_{L_p(E^n), \alpha}$, $m = 0, 1, \dots$. Lo spazio $\mathfrak{D}_{L_p, \alpha}$ così definito è strettamente incluso nell'omonimo spazio di [1]. Porremo

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{1 < p < \infty} \bigcup_{0 \leq \alpha < p-1} \mathfrak{D}'_{L_p, \alpha}$$

ove $\mathfrak{D}'_{L_p, \alpha}$ indica il duale di $\mathfrak{D}_{L_{p'}, \alpha}$, $p' = p/(p-1)$. Gli elementi di $\mathfrak{D}'_{L_p, \alpha}$ sono le distribuzioni che possono scriversi come somme finite di derivate di prodotti di funzioni di p -esima potenza integrabile su E^n per $\prod_{j=1}^n (1 + |x_j|)^{\alpha}$.

Tutte le proposizioni di [1] e [2] continuano a sussistere inalterate con questa nuova definizione dello spazio $\mathfrak{D}$, in particolare il lemma 1.9 ed il teorema 1.1 da cui le altre dipendono. Nel seguito $\mathfrak{D}$ indicherà sempre lo spazio ora definito; $L_p = L_p(E^n)$, $1 \leq p < \infty$ indicherà naturalmente lo spazio delle classi delle funzioni a valori complessi aventi p -esima potenza integrabile su E^n , con la norma

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

2. DEFINIZIONE 2.1. Sia $\mathfrak{S}_0^n$ l'insieme dei poliedri convessi $\mathbf{P}$ di S^n tali che

- a) $\mathbf{P} \subset S_+^n = \{s \in S^n; s_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$;
- b) l'origine $\mathbf{o}$ di S^n appartiene a $\mathbf{P}$;
- c) $\forall j = 1, \dots, n$ è $m_j = \max \{\rho \geq 0; \rho e^j \in \mathbf{P}\} > 0$.

Si vede facilmente che se $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_0^n$ l'origine $\mathbf{o}$ di S^n ed i punti $m_j e^j$ sono fra i vertici s^l , $l = 1, \dots, N(\mathbf{P})$, di $\mathbf{P}$. Porremo sempre $s^1 = \mathbf{o}$. $\mathfrak{S}_0^n$ contiene l'insieme dei poliedri convessi di S^n indicato con $\mathfrak{S}^n$ in [1] e [2]. Se $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_0^n$

è $\left\{ s \in S_+^n; \sum_{j=1}^n m_j^{-1} s_j \leq 1 \right\} \subset \mathbf{P}$. In accordo con [1] porremo

$$\mathbf{P}^+ = \left\{ s \in \mathbf{P}; \sum_{j=1}^n m_j^{-1} s_j \geq 1 \right\}$$

ed indicheremo con $\dot{\mathbf{P}}^+$ l'insieme degli $\mathbf{s} \in \mathbf{P}$ che appartengono ad almeno uno degli iperpiani estremi di appoggio di $\mathbf{P}$ diversi dagli iperpiani coordinati. Si vede facilmente che $\mathbf{P}^+$ coincide con l'involuppo convesso dei vertici di $\mathbf{P}$ diversi dall'origine.

LEMMA 2.1. Sia $\mathbf{P} \in \mathcal{G}_0^n$ ed $\mathbf{s}^l, l = 1, \dots, N(\mathbf{P})$, i suoi vertici ($\mathbf{s}^1 = \mathbf{o}$); allora

i) se $\mathbf{s} \in \mathbf{P}$ è

$$|\xi^{\mathbf{s}}| \leq \sum_1^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^l}|, \quad \xi \in E^n;$$

ii) se $\mathbf{s} \in \mathbf{P}^+$ è

$$|\xi^{\mathbf{s}}| \leq \sum_2^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^l}|, \quad \xi \in E^n;$$

iii) se $\mathbf{s} \in \mathbf{P} \setminus \dot{\mathbf{P}}^+$ è

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\xi^{\mathbf{s}}| \left[\sum_2^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^l}| \right]^{-1} = 0;$$

iv) se $\mathbf{s} \in S_n^+ \setminus \mathbf{P}$ esiste un $\mathbf{a} \in S^n$ con almeno una coordinata positiva tale che posto $\xi = (t^{a_1}, \dots, t^{a_n})$ è

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi^{\mathbf{s}}| \left[\sum_2^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^l}| \right]^{-1} = +\infty;$$

v) se $\mathbf{s} \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}^+$ posto $\xi = (t^{m_1^{-1}}, \dots, t^{m_n^{-1}})$ è

$$\lim_{t \rightarrow 0} |\xi^{\mathbf{s}}| \left[\sum_2^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^l}| \right]^{-1} = +\infty.$$

Dimostrazione. Le i) e ii) sono semplici conseguenze della convessità di $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}^+$ ⁽²⁾, mentre la v) è immediata. Per provare iii) ⁽³⁾ e iv) osserviamo che come conseguenza di a), b), c) si può scrivere

$$\mathbf{P} = \bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_n^+; \sum_1^n a_j s_j \leq 1 \right\},$$

ove $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ è un insieme finito (e non vuoto) di S^n tale che ogni suo elemento ha almeno una coordinata positiva. Essendo $\mathbf{P}$ limitato in S^n è inoltre

$\max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbf{P})} \sum_1^n a_j s_j > 0$ per ogni $\mathbf{s} \in \mathbf{P} \setminus \{\mathbf{o}\}$. Se $\mathbf{s} \in \mathbf{P} \setminus \dot{\mathbf{P}}^+, \mathbf{s} \neq \mathbf{o}$, è

$\max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbf{P})} \sum_1^n a_j s_j = \rho < 1$ e quindi $\rho^{-1} \mathbf{s} \in \dot{\mathbf{P}}^+$. Per ii) è quindi

$$|\xi^{\mathbf{s}}| \leq \left(\sum_2^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^l}| \right)^{\rho} \quad \forall \xi \in E^n,$$

(2) Si veda per esempio [5] od il lemma 3.1 di [1].

(3) Si veda anche [7], lemma 5.

da cui segue subito iii) poichè per c) è $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^{N(\mathbf{P})} |\xi^{s^l}| = +\infty$. Se infine $\mathbf{s} \in S_+^n \setminus \mathbf{P}$ è $\sum_{j=1}^n a_j s_j > 1$ per almeno un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbf{P})$. Scelto uno di tali $\mathbf{a}$ e posto $\xi = (t^{a_1}, \dots, t^{a_n})$ avremo $|\xi^{\mathbf{s}}| = |t|^{\sum_{j=1}^n a_j s_j}$ e $|\xi^{s^l}| = |t|^{\sum_{j=1}^n a_j s_j^l} \leq |t|$ per $|t| \geq 1, l = 2, \dots, N(\mathbf{P})$, poichè è sempre $\sum_{j=1}^n a_j s_j^l \leq 1$. Ciò prova iv).

3. Come il lemma 5.3 di [2] si prova il

LEMMA 3.1. Sia $P(\xi) = \sum_{\mathbf{s}} a_{\mathbf{s}} \xi^{\mathbf{s}}$ un polinomio a coefficienti complessi tale che $\{\mathbf{s} \in S^n; a_{\mathbf{s}} \neq 0\} \subset \mathbf{P} \in \mathfrak{S}_0^n$ e che soddisfi alla K ii); sia $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(E^n)$, $0 \leq \zeta(\xi) \leq 1$, $\zeta(\xi) = 1$ per $|\xi| \leq M, M > R$, $\zeta(\xi) = 0$ per $|\xi| > 2M$, allora la funzione

$$[1 - \zeta(\xi)] [P(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n,$$

è un moltiplicatore nello spazio $\mathfrak{S}$ delle funzioni indefinitamente differenziabili in E^n ed a decrescenza rapida all'infinito ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$.

OSSERVAZIONE 3.1. Affinchè un polinomio $P(\xi)$ soddisfi alle ipotesi del lemma 3.1 è necessario che l'involuppo convesso $\mathbf{R}$ in S^n dell'insieme $\{\mathbf{s} \in S^n; a_{\mathbf{s}} \neq 0\} \cup \{0\}$ coincida con $\mathbf{P}$, ossia che $a_{\mathbf{s}^l} \neq 0$ per ogni $l = 2, \dots, N(\mathbf{P})$.

Dimostrazione. Essendo i punti $m_j e^j, j = 1, \dots, n$, vertici di $\mathbf{P}$, i termini $|\xi_j|^{m_j}$ figurano a secondo membro della maggiorazione a cui deve soddisfare $P(\xi)$. Fra gli $\mathbf{s}$ tali che $a_{\mathbf{s}} \neq 0$ dovranno quindi esservi gli $m_j e^j, j = 1, \dots, n$. È dunque $\mathbf{R} \in \mathfrak{S}_0^n$. Se $\mathbf{R}$ non coincidesse con $\mathbf{P}$ vi sarebbe almeno un vertice di $\mathbf{P}$, sia $\mathbf{s}^l$, diverso dall'origine e non appartenente ad $\mathbf{R}$. Indicati con $\mathbf{r}^k, k = 1, \dots, N(\mathbf{R})$, i vertici di $\mathbf{R}$ per la i) del lemma 2.1 applicata ad $\mathbf{R}$ sarebbe

$$\sum_{l=1}^{N(\mathbf{P})} |\xi^{s^l}| |P(\xi)|^{-1} \geq c |\xi^{s^l}| \left[\sum_{k=1}^{N(\mathbf{R})} |\xi^{\mathbf{r}^k}| \right]^{-1}, \quad |\xi| > R,$$

ove c è una costante positiva, ma il secondo membro non può mantenersi limitato per $|\xi| > R$ per la iv) del lemma 2.1 applicata ad $\mathbf{R}$.

LEMMA 3.2. Se $P(\xi) = \sum_{\mathbf{s}} a_{\mathbf{s}} \xi^{\mathbf{s}}$ è un polinomio a coefficienti complessi tale che $\{\mathbf{s} \in S^n; a_{\mathbf{s}} \neq 0\} \subset \mathbf{P}^+, \mathbf{P} \in \mathfrak{S}_0^n$ e che soddisfi alla K ii) con $R = 0$, allora qualunque sia $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$ la funzione $\xi^{\mathbf{r}} [P(\xi)]^{-1}$ ⁽⁴⁾ è un moltiplicatore nello spazio Ψ ⁽⁵⁾ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) per $1 < p < \infty, q = p/(1 - p\eta)$ qualunque sia $\eta \in [0, p^{-1}[$ tale che $\mathbf{r} + \eta \mathbf{e} \in \mathbf{P}^+$.

$$(4) \text{ Per } \mathbf{r} \in S^n \text{ si pone } \xi^{\mathbf{r}} = \prod_{j=1}^n \xi_j^{r_j}, \xi_j^{r_j} = \begin{cases} \xi_j^{r_j} & \text{se } \xi_j \geq 0 \\ e^{-i\pi r_j} |\xi_j|^{r_j} & \text{se } \xi_j < 0 \end{cases}.$$

(5) Definizione e proprietà di questo spazio, introdotto da P. I. Lizorkin [3], sono anche esposte nei nn. 1 e 2 di [1].

La dimostrazione di questo lemma, fondata su un teorema di P. I. Lizorkin [4] si conduce come quella del lemma 5.2 di [2], tenendo conto che se $\mathbf{r} + \eta \mathbf{e} \in \mathbf{P}^+$

$$|\xi^{\mathbf{r}+\eta \mathbf{e}}| |P(\xi)|^{-1} \leq C^{-1} |\xi^{\mathbf{r}+\eta \mathbf{e}}| \left[\sum_{\mathbf{l}}^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^{\mathbf{l}}}| \right]^{-1} \leq C^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus \{0\},$$

per la ii) del lemma 2.1.

OSSERVAZIONE 3.2. *Affinché esistano dei numeri η soddisfacenti alle condizioni richieste dal lemma 3.2 occorre e basta che sia*

$$(3.1) \quad \left(1 - \sum_j^n m_j^{-1} r_j\right) \left(\sum_j^n m_j^{-1}\right)^{-1} < p^{-1}.$$

4. Se $P(D)$ è un polinomio differenziale soddisfacente alla K il suo poliedro caratteristico $\mathbf{P}$ appartiene a $\mathfrak{P}_0^n$. Dalla iii) del lemma 2.1 segue allora subito il

LEMMA 4.1 ⁽⁶⁾. *Un polinomio differenziale $P(D)$ a coefficienti complessi costanti soddisfacente alla K i) soddisfa alla K ii) se e soltanto se esistono due costanti positive $C_1 > 0$ ed $R_1 \geq 0$ tali che*

$$K \text{ ii}') \quad \left| \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{P}^+} a_{\mathbf{s}} \xi^{\mathbf{s}} \right| \geq C_1 \sum_{\mathbf{l}}^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^{\mathbf{l}}}| \quad \forall \xi \in E^n, |\xi| > R_1.$$

Il polinomio $P_0(\xi) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{P}^+} a_{\mathbf{s}} \xi^{\mathbf{s}}$ è chiamato in [7] *parte principale* del polinomio $P(\xi)$. Alla K ii') con $R_1 = 0$ soddisfano tutti i polinomi quasi ellittici. Ciò accade, come si vede con semplici esempi, anche per polinomi non quasi ellittici.

TEOREMA 4.1. *Se $P(D)$ è un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti soddisfacente alla K, allora da $u \in \mathfrak{S}'$, $P(D)u \in \mathfrak{D}_{L_p}^{(7)}$, $1 < p < \infty$, segue $u \in \mathcal{C}^\infty(E^n)$.*

Dimostrazione. Indicate con $\mathfrak{F}$ ed $\mathfrak{F}^{-1}$ la trasformazione di Fourier e la sua inversa, nello spazio $\mathfrak{S}'$ delle distribuzioni temperate è

$$u = \mathfrak{F}^{-1}((1 - \zeta) \mathfrak{F}u) + \mathfrak{F}^{-1}(\zeta \mathfrak{F}u) = u_1 + u_2$$

ove ζ è la funzione così indicata nel lemma 3.1. Per ogni multi-indice $\mathbf{r}$ di interi non negativi è poi $\mathfrak{F}(D^{\mathbf{r}} u_1) = (1 - \zeta) [P(\xi)]^{-1} \mathfrak{F}(D^{\mathbf{r}} P(D)u)$ onde, per il lemma 3.1, $D^{\mathbf{r}} u_1 \in L_p$. Ne segue che $u_1 \in \mathfrak{D}_{L_p}$. Ciò prova il teorema poichè $u_2 \in \mathcal{C}^\infty(E^n)$.

(6) Cfr. [7] teorema 2.

(7) $\mathfrak{D}_{L_p}$ indica qui lo spazio $\mathfrak{D}_{L_p, \alpha}$ del n. 1 quando $\alpha = 0$.

TEOREMA 4.2. Sia $P(D)$ un polinomio differenziale a coefficienti complessi costanti soddisfacente alla K con $R=0$ e con $\{s; a_s \neq 0\} \subset \mathbf{P}^+$ ed $r \in \mathbf{P}$ soddisfi alla (3.1), allora per ogni $u \in \mathfrak{D}$ tale che $P(D)u \in L_p$, $1 < p < \infty$, è $D^r u \in L_q$ e

$$(4.1) \quad \|D^r u\|_{L_q} \leq c \|P(D)u\|_{L_p},$$

con c costante indipendente da u , per ogni $q = p/(1 - p\eta)$, con

$$\eta \in \left[\left(1 - \sum_{j=1}^n m_j^{-1} r_j \right) \left(\sum_{j=1}^n m_j^{-1} \right)^{-1}, \min_{a \in \mathfrak{A}(\mathbf{P})} \left(1 - \sum_{j=1}^n a_j r_j \right) / \max_{a \in \mathfrak{A}(\mathbf{P})} \sum_{j=1}^n a_j \right] \cap [0, p^{-1}[.$$

Questo teorema si prova utilizzando il lemma 3.2 ed il teorema 2.2 di [1].

TEOREMA 4.3. $P(D)$ soddisfi alla ipotesi del teorema 4.2 e sia $\sum_{j=1}^n m_j^{-1} > p$, allora se $f \in L_p$ esiste una ed una sola $u \in L_q$, $q = p/(1 - p\eta)$, $\eta \in \left[\left(\sum_{j=1}^n m_j^{-1} \right)^{-1}, \left(\max_{a \in \mathfrak{A}(\mathbf{P})} \sum_{j=1}^n a_j \right)^{-1} \right] \cap [0, p^{-1}[$ soluzione della equazione $P(D)u = f$ in E^n e per essa valgono le (4.1).

Dimostrazione. Il lemma 3.2 assicura che esiste una ed una sola $u \in L_q$, con i q indicati qui sopra, tale che

$$\langle f, \mathfrak{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1} \mathfrak{F}\varphi) \rangle = \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathfrak{S},$$

onde $\langle P(D)u, \varphi \rangle = \langle u, \mathfrak{F}^{-1}(P(\xi) \mathfrak{F}\varphi) \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ per ogni $\varphi \in \mathfrak{S}$.

TEOREMA 4.4. $P(D)$ soddisfi alla ipotesi K con $R=0$, allora se $u \in \mathfrak{D}$ e $P(D)u = 0$ è $u = 0$ in E^n .

Dimostrazione. Nella ipotesi indicata $[P(\xi)]^{-1}$ è infatti un moltiplicatore in Ψ onde con le notazioni di [1]

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle P(D)u, \mathfrak{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1} \mathfrak{F}\varphi) \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Il teorema segue allora dal teorema 1.1 di [1] e dal teorema 4.1.

Nel caso in cui $P(D) = P_0(D)$ sia quasi ellittico, un risultato del tipo del teorema 4.3 si trova in [6].

BIBLIOGRAFIA

- [1] CATTABRIGA L., *Moltiplicatori di Fourier e teoremi di immersione per certi spazi funzionali*, «Annali Sc. Normale Sup. di Pisa», 24 (1970).
- [2] CATTABRIGA L., *Moltiplicatori di Fourier e teoremi di immersione per certi spazi funzionali*, II, in corso di stampa su «Annali Sc. Normale Sup. di Pisa».
- [3] LIZORKIN P. I., *Differenziazione generalizzata di Liouville e spazi funzionali $L_p^r(E^n)$. Teoremi di immersione*, «Matem. Sb.», 60 (1963).
- [4] LIZORKIN P. I., *Sui moltiplicatori dell'integrale di Fourier negli spazi $L_{p,\Phi}$* , «Trudy Matem. Inst. Akad. Nauk SSSR», 89 (1967).
- [5] MIHAILOV V. P., *Sul comportamento all'infinito di una classe di polinomi*, «Trudy Matem. Inst. Akad. Nauk SSSR», 91 (1967).
- [6] USPENSKIĬ S. V., *Sulla limitatezza (sommabilità) delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche in regioni non limitate*, «Doklady Akad. Nauk SSSR», 187 (1969).
- [7] VOLEVIČ L. R. e GINDIKIN S. G., *Su una classe di polinomi ipoellittici*, «Matem. Sb.», 75 (1968).