Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Fichera

Studio delle singolarità della soluzione di un problema di Dirichlet per l'equazione $u_{xy} = 0$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.1, p. 6–17.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_1_6_0>

Analisi matematica. — *Studio delle singolarità della soluzione di un problema di Dirichlet per l'equazione* $u_{xy} = 0$. Nota[*] del Corrisp. GAETANO FICHERA.

SUMMARY. — A Dirichlet problem for the hyperbolic equation $u_{xy} = 0$ is considered. This problem is a limit case of the classical Goursat problem. It is shown that the solution exists and is unique. This solution is singular along two sides of the rectangle where it exists. The singularities are fully investigated and described.

Siano date nel piano x, y le due curve Γ_1 e Γ_2, rispettivamente di equazioni

$$y = \alpha(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad , \quad y = \beta(x) \quad (0 \leq x \leq 1) .$$

Siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ funzioni continue nell'intervallo chiuso $(0, 1)$ assieme alle loro derivate prime e tali che

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0 \; ; \; \alpha(1) = \beta(1) = \sigma > 0 \; ; \; \alpha'(x) > 0 \; , \; \beta'(x) > 0 \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$\alpha(x) < \beta(x) \quad (0 < x < 1) \; ; \; \alpha'(0) < \beta'(0) \; ; \; \alpha'(1) > \beta'(1)$$ [1].

Si consideri il problema consistente nel ricercare una funzione $u = u(x, y)$ la quale sia continua nel rettangolo $R : 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x \leq \sigma$, assieme alle derivate prime u_x e u_y, sia dotata in R della derivata seconda mista e verifichi in R l'equazione $u_{xy} = 0$; inoltre, assegnate le due funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ continue in $(0,1)$ con le loro derivate prime e tali che

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \quad , \quad \varphi_1(1) = \varphi_2(1) ,$$

si abbia in $(0, 1)$

$$u[x, \alpha(x)] = \varphi_1(x) \quad , \quad u[x, \beta(x)] = \varphi_2(x) . \tag{1}$$

Picone ha, nel 1910, dimostrato che tale problema è *iperdeterminato* [2] ed in una mia Nota in corso di stampa [3], rispondendo ad un quesito postomi

(*) Presentata nella seduta del 9 gennaio 1971.

(1) La teoria che verrà esposta in questa Nota sussiste anche in ipotesi lievemente più generali per $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, che consentono ad $\alpha'(x)$ e $\beta'(x)$ di annullarsi rispettivamente per $x = 0$ e per $x = 1$ ed inoltre di esser eventualmente tali che: $\lim_{x \to 0^+} \beta'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} \alpha'(x) = +\infty$. Rinunciamo, tuttavia, onde semplificare l'esposizione, a considerare tali più generali ipotesi, lasciando la cura di ciò al Lettore.

(2) Cfr. [1]. I numeri fra parentesi quadre rimandano alla Bibliografia alla fine della Nota.

(3) Cfr. [2].

da Tricomi, ho trovato le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare i *dati al contorno* $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ perché esista la soluzione u del problema considerato.

Se, dato arbitrariamente ε , $0 < \varepsilon < 1$, si considera il rettangolo $R_\varepsilon : \varepsilon \leq x \leq 1$, $\beta(\varepsilon) \leq y \leq \sigma$, è classicamente noto che in R_ε esiste ed è unica la funzione $u(x, y)$, continua in R_ε con u_x e u_y, tale che $u_{xy} = 0$ e verificante le seguenti condizioni:

$$(2) \qquad u[\alpha^{-1}(y), y] = \varphi_1[\alpha^{-1}(y)] \quad , \quad u[\beta^{-1}(y), y] = \varphi_2[\beta^{-1}(y)]$$
$$(\beta(\varepsilon) \leq y \leq \sigma).$$

È ovvio che con α^{-1} e β^{-1} sono state indicate le funzioni inverse di α e β, rispettivamente.

Tale problema è noto come *problema di Goursat* (4), relativo al rettangolo R_ε ed alle curve $\Gamma_1 \cap R_\varepsilon$, $\Gamma_2 \cap R_\varepsilon$ (vedi fig. 1).

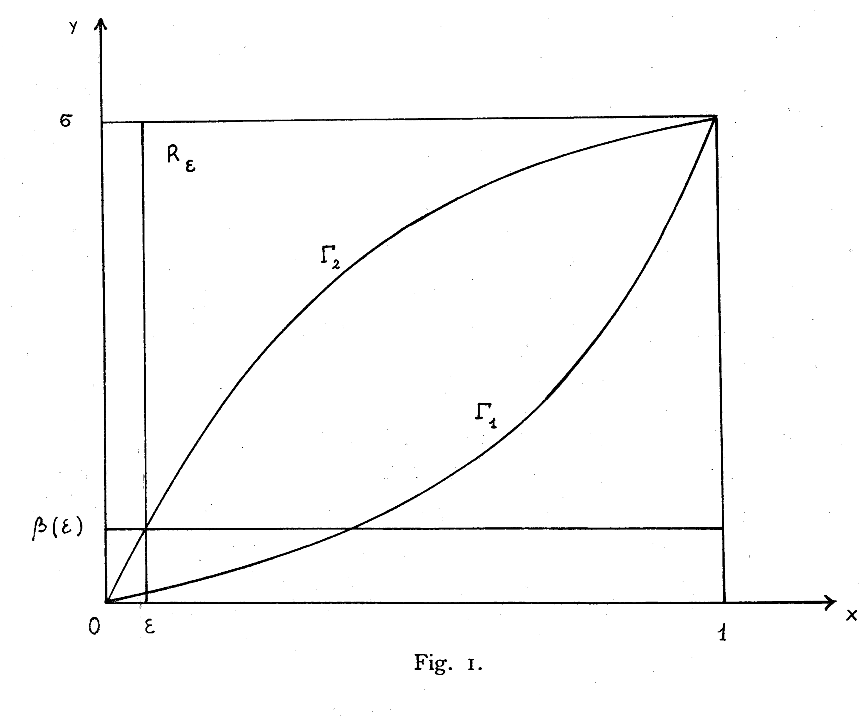

Fig. 1.

Si può quindi affermare che, se si considera il problema, consistente nel ricercare una funzione $u(x, y)$ continua assieme ad u_x e u_y nel rettangolo *inferiormente aperto* $R' : 0 < x \leq 1$, $0 < y \leq \sigma$, tale che in R' sia $u_{xy} = 0$ e verificante le (1) per $0 < x \leq 1$, siffatto problema ammette una ed una sola soluzione. Se non si impongono a $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ ulteriori condizioni – precisamente quelle specificate nella mia Nota dianzi citata – la $u(x, y)$, la quale

(4) Cfr. [3], [4], [5], [1], [6].

è data da una funzione del tipo $A(x) + B(y)$, sarà tale che $A(x)$ avrà una singolarità per $x \to 0^+$ e $B(y)$ una singolarità per $y \to 0^+$.

Scopo della presente Nota è uno studio approfondito del tipo di singolarità che $A(x)$ e $B(y)$ hanno rispettivamente per $x \to 0^+$ e per $y \to 0^+$. Occorre dire che tale problema è stato adombrato dal Fubini in una sua Nota del 1905 (5). Egli, studiando una più generale equazione iperbolica del 2° ordine, si limita però solo a concludere che la $u(x, y)$ avrà, nell'origine, una *discontinuità di seconda specie* (6).

Ritengo che l'analisi compiuta nella presente Nota possa considerarsi esauriente e, sebbene limitata alla particolare equazione $u_{xy} = 0$, indicativa per l'analoga indagine da compiere nel caso di una più generale equazione iperbolica del 2° ordine. Tale analisi è fondata sullo studio, piuttosto delicato, delle soluzioni anche non continue di una particolare equazione funzionale, studio che, a mio avviso, è, di per se stesso, non scevro di interesse.

1. Studio di una particolare equazione funzionale

Sia $y = \tau(x)$ una funzione reale della variabile reale x, definita per $0 \leq x \leq h$ $(h > 0)$, continua nell'intervallo chiuso $[0, h]$ assieme alla sua derivata prima e soddisfacente le seguenti condizioni:

$$\tau(0) = 0 \quad ; \quad \tau(x) < x \quad , \quad \tau'(x) > 0 \quad (0 < x \leq h) \quad ; \quad \tau'(0) < 1 .$$

Sia $\psi(x)$ una funzione continua in $[0, h]$ assieme alla sua derivata prima e tale che $\psi(0) = 0$.

Studieremo la seguente equazione funzionale

$$g(x) - g[\tau(x)] = \psi(x), \tag{3}$$

già considerata dal Goursat nelle sue ricerche sulle equazioni iperboliche (7).

Diremo che una funzione $f(x)$ appartiene alla classe $C^n[0, h]$ (n intero ≥ 1) se è continua nell'intervallo chiuso $[0, h]$ assieme alle derivate fino all'ordine n incluso. Se la funzione è continua in $[0, h]$ assieme a *qualsiasi* sua derivata, diremo che essa appartiene a $C^\infty[0, h]$. È ovvio che $f(x)$ appartiene a $C^\infty[0, h]$ se e solo se essa appartiene a $C^n[0, h]$ qualunque sia n.

(5) Cfr. [7].

(6) Il Fubini, riferendosi all'equazione $w_{xy} = f(w, x, y)$, supponendo nulli i dati assegnati su Γ_1 e Γ_2 ed R convenientemente piccolo, dimostra la limitatezza della w in R ed afferma: « non si può trovare un limite superiore delle derivate prime della w (*almeno nel caso generale in cui la f non è una funzione analitica*) » [cfr. [7] pag. 622]. Dall'analisi che verrà compiuta nella presente Nota, risulterà che, *anche se si suppone f analitica*, il minimo limite ed il massimo limite delle derivate prime della w, per $x \to 0^+$, $y \to 0^+$, saranno, in generale, rispettivamente, $-\infty$ e $+\infty$.

(7) Cfr. [3] 2ª Memoria. Il Goursat si limita a ricercare una soluzione della (3) continua in $[0, h]$, oppure ivi continua con la sua derivata prima. Egli stabilisce l'esistenza di tale ultima soluzione in ipotesi restrittive per $\psi(x)$.

Avvertiamo che in questa Nota, considerando una funzione della variabile indipendente x, composta mediante le funzioni $p, q, \cdots, r$, anziché scrivere $p\{q[\cdots r(x)]\}$, scriveremo – in taluni casi – più semplicemente: $pq \cdots r(x)$. Se si ha $p \equiv q \equiv \cdots \equiv r$ e se tali funzioni sono in numero di k, allora, in luogo di $pp \cdots p(x)$, scriveremo $p^k(x)$, convenendo inoltre di porre $p^0(x) \equiv x$. Se la $p(x)$ è dotata di inversa $p^{-1}(x)$ e se k è un intero positivo, scrivendo $p^{-k}(x)$ intenderemo $(p^{-1})^k(x)$.

I. – *Siano* $\tau(x)$ *e* $\psi(x)$ *funzioni di* $C^n[0, h]$. *L'equazione funzionale* (3) *ammette una ed una sola soluzione* $g(x)$ *appartenente a* $C^n[0, h]$ *e nulla per* $x = 0$.

Per dimostrare il teorema basterà far vedere che se m è un qualsiasi intero tale che $1 \leq m \leq n$, allora la serie ottenuta derivando m volte rispetto ad x i termini della serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi[\tau^k(x)]$, converge uniformemente in $[0, h]$. Poiché, essendo $\psi(0) = 0$, $\tau(0) = 0$, la serie considerata convergerà essa stessa uniformemente in $[0, h]$, sarà immediato verificare che la funzione

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi[\tau^k(x)] \tag{4}$$

è una soluzione della (3) appartenente a $C^n[0, h]$ ed è tale che $g(0) = 0$.

Per ottenere la serie derivata m–esima di quella al secondo membro della (4), ci serviremo della utile, ma non molto nota, *formola di Faà di Bruno*, che fornisce la derivata m–esima di una funzione composta [8]. Avremo allora la seguente espressione per la serie derivata m–esima

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \sum_{\substack{i+2j+\cdots+ls=m \\ i\geq 0, j\geq 0, \cdots s>0}} \frac{m!}{i!\,j!\cdots s!} \psi^{(i+j+\cdots+s)}[\tau^k(x)] \left(\frac{1}{1!}\frac{d\tau^k}{dx}\right)^i \left(\frac{1}{2!}\frac{d^2\tau^k}{dx^2}\right)^j \cdots \left(\frac{1}{l!}\frac{d^l\tau^k}{dx^l}\right)^s.$$

Posto $p = i + j + \cdots + s$, basterà, quindi, dimostrare la totale convergenza in $[0, h]$ di ciascuna delle seguenti serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(p)}[\tau^k(x)] \left(\frac{1}{1!}\frac{d\tau^k}{dx}\right)^i \left(\frac{1}{2!}\frac{d^2\tau^k}{dx^2}\right)^j \cdots \left(\frac{1}{l!}\frac{d^l\tau^k}{dx^l}\right)^s. \tag{5}$$

Si ha per $0 \leq x \leq h$ e qualunque sia k: $\tau^k(x) \leq \tau^k(h)$. D'altra parte riesce $\tau^k(h) > \tau^{k+1}(h)$. Sia $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \tau^k(h)$. Si ha $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \tau^{k+1}(h) = \tau[\lim\limits_{k\to\infty} \tau^k(h)] = \tau(x_0)$ e quindi $x_0 = 0$. Sia ε un fissato numero positivo tale che $\tau'(0) < \varepsilon < 1$. Sia δ_ε tale che, per $0 \leq x \leq \delta_\varepsilon$ riesca $\tau'(x) < \varepsilon$. Sia q il più piccolo intero positivo tale che $\tau^{q+1}(h) < \delta_\varepsilon$. Avremo, per $k > q$ e per ogni x in $[0, h]$: $\tau^k(x) < \delta_\varepsilon$ e, quindi,

$$\frac{d\tau^k}{dx} = \tau'[\tau^{k-1}(x)]\,\tau'[\tau^{k-2}(x)] \cdots \tau'[\tau^q(x)] \cdots \tau'[\tau(x)]\,\tau'(x) < c\,\varepsilon^{k-1-q},$$

(8) Cfr. [8].

avendo indicato con c una costante positiva tale che in $[0, h]$ riesca

$$\tau'[\tau^q(x)] \cdots \tau'[\tau(x)]\,\tau'(x) \leq c\,.$$

Pertanto

$$0 \leq \frac{d\tau^k}{dx} < c_1 \varepsilon^k\,,$$

essendo c_1 un'opportuna costante positiva.

Avremo poi

$$\begin{aligned}\frac{d^2\tau^k}{dx^2} &= \tau''[\tau^{k-1}(x)]\,\frac{d\tau^{k-1}}{dx}\,\tau'[\tau^{k-2}(x)] \cdots \tau'[\tau^q(x)] \cdots \tau'[\tau(x)]\,\tau'(x) + \\ &+ \tau'[\tau^{k-1}(x)]\,\tau''[\tau^{k-2}(x)]\,\frac{d\tau^{k-2}}{dx} \cdots \tau'[\tau^q(x)] \cdots \tau'[\tau(x)]\,\tau'(x) + \\ &\cdots + \tau'[\tau^{k-1}(x)]\,\tau'[\tau^{k-2}(x)] \cdots \tau''[\tau^q(x)]\,\frac{d\tau^q}{dx} \cdots \tau'[\tau(x)]\,\tau'(x) + \\ &\cdots + \tau'[\tau^{k-1}(x)]\,\tau'[\tau^{k-2}(x)] \cdots \tau'[\tau^q(x)] \cdots \tau''[\tau(x)]\,\tau'(x)\,\tau'(x) + \\ &+ \tau'[\tau^{k-1}(x)]\,\tau'[\tau^{k-2}(x)] \cdots \tau'[\tau^q(x)] \cdots \tau'[\tau(x)]\,\tau''(x)\,.\end{aligned}$$

Donde si deduce, detta c_2 una conveniente costante positiva,

$$\left|\frac{d^2\tau^k}{dx^2}\right| < c_2\, k\, \varepsilon^k\,.$$

Così procedendo, per $1 \leq l \leq n$, si ottiene, per $k > q + l$,

$$\left|\frac{d^l\tau^k}{dx^l}\right| < c_l\, k^{l-1}\, \varepsilon^k\,, \tag{6}$$

con c_l costante positiva. Naturalmente, pur di scegliere convenientemente c_l, può supporsi che la (6) sussista anche per $k \leq q + l$. Sia M tale che, qualunque sia $p \leq n$, riesca $|\psi^{(p)}(x)| < M$. Avremo allora che la serie (5) è tale che in $[0, h]$ i moduli dei suoi termini sono maggiorati da quelli corrispondenti nella serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{1!\,2!\cdots l!}\, c_1^i\, c_2^j \cdots c_l^s\, k^{m-p}\, \varepsilon^{pk}\,.$$

Ciò prova la totale convergenza della serie (5) in $[0, h]$.

Sia ora $\bar{g}(x)$ una funzione continua in $[0, h]$, nulla per $x = 0$ e ivi verificante la (3). Si ha

$$\bar{g}(x) - \bar{g}[\tau(x)] = \psi(x)\,, \bar{g}[\tau(x)] - \bar{g}[\tau^2(x)] = \varphi[\tau(x)]\,, \cdots$$
$$\cdots, \bar{g}[\tau^r(x)] - \bar{g}[\tau^{r+1}(x)] = \psi[\tau^r(x)]$$

e quindi

$$\bar{g}(x) - \bar{g}[\tau^{r+1}(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \psi[\tau^k(x)]\,.$$

Ma, essendo $\lim_{r\to\infty} \tau^{r+1}(x) = 0$, deduciamo: $\bar{g}(x) \equiv g(x)$.

II. – *Se* $\tau(x)$ *e* $\psi(x)$ *appartengono a* $C^\infty[0, h]$, *a tale classe appartiene anche la* $g(x)$ *data dalla* (4).

È ovvia conseguenza del Teor. I, dato che, nelle ipotesi ora ammesse, $g(x)$ appartiene a $C^n[0, h]$, qualunque sia n.

Sia $f(x)$ una funzione reale definita nell'intervallo *chiuso* $[0, h]$. Diremo che $f(x)$ è *analitica in* $[0, h]$ se appartiene a $C^\infty[0, h]$ e, qualunque sia x_0 in $[0, h]$, esiste un intervallo (aperto) I_{x_0} di centro x_0, tale che, nei punti di $[0, h]$ appartenenti ad I_{x_0}, la $f(x)$ è la somma della serie di Taylor, di origine x_0, ad essa relativa.

III. – *Se* $\tau(x)$ *e* $\psi(x)$ *sono analitiche in* $[0, h]$, *la* $g(x)$ *data dalla* (4), *è analitica in* $[0, h]$.

Le ipotesi ammesse su $\tau(x)$ e $\psi(x)$ equivalgono a supporre che tali funzioni siano le *tracce* sul segmento S del piano x, y, definito da: $0 \leq x \leq h$, $y = 0$, di due funzioni della variabile complessa $z = x + iy$: $\tau(z)$ e $\psi(z)$, le quali sono olomorfe in un insieme aperto H del piano x, y, contenente il segmento S.

Sia J_0 un intorno circolare del punto $z = 0$ avente raggio r e contenuto in H. In J_0 si ha $\tau(z) = z\tau'(0) + O(z^2)$ e quindi $|\tau(z)| \leq |z| \tau'(0) + c|z|^2$, con c costante positiva. Sia η tale che: $0 < \eta < [1 - \tau'(0)] c^{-1}$, $\eta < r$. Sarà, per $|z| < \eta$: $|\tau(z)| < \eta$. Sia ε tale che $\tau'(0) < \varepsilon < 1$. Sia δ_ε tale che $0 < \delta_\varepsilon < r$ e per $|z| < \delta_\varepsilon$ riesca $|\tau'(z)| < \varepsilon$. Fissiamo η in modo che si abbia $\eta < \min\{[1 - \tau'(0)] c^{-1}, \delta_\varepsilon\}$. Diciamo q il più piccolo intero positivo tale che $\tau^{q+1}(h) < \eta$. Avremo allora $\tau^{q+1}(x) < \eta$ per $0 \leq x \leq h$. Sia C_x un intorno circolare (nel piano complesso) del punto $x + i0$. Sia C_x contenuto in H e sia tale che per ogni z di C_x riesca $|\tau^{q+1}(z)| < \eta$. Avremo allora, per $k > q$, $|\tau^k(z)| < \eta$ per ogni z di C_x. Esiste quindi un insieme aperto e connesso H_0, contenuto in H e contenente S, tale che per ogni z di H_0 e per $k > q$ riesce $|\tau^k(z)| < \eta$. Possiamo anche supporre H_0 tale che in esso si abbia $|\psi'(z)| \leq M$, essendo M una costante positiva. Considerata la serie di funzioni olomorfe in H

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi[\tau^k(z)], \tag{7}$$

avremo per il termine di indice k della sua serie derivata

$$\frac{d\psi[\tau^k(z)]}{dz} = \psi'[\tau^k(z)]\, \tau'[\tau^{k-1}(z)]\, \tau'[\tau^{k-2}(z)] \cdots \tau'[\tau(z)]\, \tau'(z),$$

e quindi, per $k > q$ e per z in H_0,

$$\left| \frac{d\psi[\tau^k(z)]}{dz} \right| \leq M\, \varepsilon^{k-1-q} \left| \tau'[\tau^q(z)] \cdots \tau'[\tau(z)]\, \tau'(z) \right|.$$

Ciò prova la totale convergenza della serie derivata della (7) in H_0. Ne segue che la funzione

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi[\tau^k(z)]$$

è olomorfa in H_0.

Indicheremo con $(0, h]$ l'intervallo, di estremi 0 e h, *inferiormente aperto*: $0 < x \leq h$. Le funzioni continue in $(0, h]$ assieme alle derivate fino all'ordine n costituiranno la classe $C^n(0, h]$ e quelle che in $(0, h]$ hanno derivate di ordine comunque elevato, la classe $C^\infty(0, h]$. Inoltre $f(x)$ sarà detta analitica in $(0, h]$ se appartiene a $C^\infty(0, h]$ e se per ogni x_0 tale che $0 < x_0 \leq h$ esiste un intervallo (aperto) I_{x_0} di centro x_0 tale che, nei punti di $(0, h]$ appartenenti a I_{x_0}, la $f(x)$ è la somma della serie di Taylor, di origine x_0, ad essa relativa.

Volendo studiare l'equazione (3) nelle classi $C^n(0, h]$, $C^\infty(0, h]$, oppure nella classe delle funzioni analitiche in $(0, h]$, osserviamo che, se $\tau(x)$ e $\psi(x)$ soddisfano le ipotesi di uno dei teoremi I, II, III, basta determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$\gamma(x) - \gamma[\tau(x)] = 0, \tag{8}$$

che appartengono, rispettivamente, alle classi $C^n(0, h]$, $C^\infty(0, h]$, oppure sono analitiche in $(0, h]$. Poiché nelle applicazioni, che abbiamo in vista, $\tau(x)$ e $\psi(x)$ saranno sempre supposte appartenenti a $C^n[0, h]$ o a $C^\infty[0, h]$, oppure analitiche in $[0, h]$, basterà limitarci allo studio della (8) nelle classi anzidette relative a $(0, h]$.

Sia ρ un numero positivo tale che $0 < \rho \leq h$ e $f(x)$ una funzione reale definita nell'intervallo $[\tau(\rho), \rho]$. Sia s il più piccolo intero tale che $\tau^s(h) \leq \rho$. Indicheremo con $L_\varrho f(x)$ l'operatore lineare, il quale alla funzione $f(x)$ fa corrispondere la funzione $\gamma(x)$ così definita in $(0, h]$

$$\gamma(x) \equiv L_\varrho f(x) \begin{cases} = f[\tau^{-k+1}(x)] & \text{per } \tau^k(\rho) < x \leq \tau^{k-1}(\rho) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots), \\ = f[\tau^i(x)] & \text{per } \tau^{-i+1}(\rho) < x \leq \tau^{-i}(\rho) \quad (i = 1, \cdots, s-1), \\ = f[\tau^s(x)] & \text{per } \tau^{-s+1}(\rho) < x \leq h . \end{cases}$$

IV. – *Sia* $\tau(x)$ *appartenente a* $C^n[0, h]$. *Assegnato* ρ *in* $(0, h]$, *sia data la funzione* $f(x)$ *appartenente a* $C^n[\tau(\rho), \rho]$ *e verificante le condizioni*:

$$\left[\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right]_{x=\tau(\varrho)} = \left[\frac{d^m f[\tau^{-1}(\xi)]}{d\xi^m}\right]_{\xi=\tau(\varrho)} \qquad (m = 0, 1, \cdots, n). \tag{9}$$

Esiste una ed una sola soluzione $\gamma(x)$ *dell'equazione* (9), *appartenente a* $C^n(0, h]$ *e tale che sia* $\gamma(x) = f(x)$ *per* $\tau(\rho) \leq x \leq \rho$. *La* $\gamma(x)$ *è data da*:

$$\gamma(x) = L_\varrho f(x). \tag{10}$$

Se $\tau(x)$ *appartiene a* $C^\infty[0, h]$, $f(x)$ *appartiene a* $C^\infty[\tau(\rho), \rho]$ *e le* (9) *sono soddisfatte per ogni* m, *allora la* $\gamma(x)$ *data da* (10) *appartiene a* $C^\infty(0, h]$. *Se, inoltre,* $\tau(x)$ *è analitica in* $[0, h]$ *e* $f(x)$ *è analitica in* $[\tau(\rho), \rho]$, *la* $\gamma(x)$ *è analitica in* $(0, h]$.

Fissato x in $(0, h]$, rimane determinato un intero q tale che $q \geq -s+1$ e $\tau^q(\rho) < x \leq \tau^{q-1}(\rho)$, con l'intesa che nell'ultima diseguaglianza si deve leggere h, in luogo di $\tau^{-s}(\rho)$, se riesce $q = -s+1$. Sarà allora

$\gamma(x) = f[\tau^{-q+1}(x)]$. Riesce inoltre $\tau^{q+1}(\rho) < \tau(x) \leq \tau^{q}(\rho)$ e quindi $\gamma[\tau(x)] = f[\tau^{-q}\tau(x)] = f[\tau^{-q+1}(x)]$; pertanto la $\gamma(x)$ data da (10) verifica la (8) ed inoltre è tale che per $\tau(\rho) < x \leq \rho : \gamma(x) = f(x)$. Per ogni intero $q \geq -s+1$ consideriamo l'intervallo $\tau^{q+1}(\rho) < x \leq \tau^{q-1}(\rho)$, con la solita intesa di leggere h in luogo di $\tau^{-s}(\rho)$ se $q = -s+1$. Sia $\tau(x)$ appartenente a $C^n[0, h]$ e $f(x)$ a $C^n[\tau(\rho), \rho]$. Per provare l'appartenenza di $\gamma(x)$ a $C^n(0, h]$ basta far vedere che è $\gamma(x)$ contenuto in $C^n(\tau^{q+1}(\rho), \tau^{q-1}(\rho)]$. Poniamo: $\xi = \tau^{-q+1}(x)$ e quindi $x = \tau^{q-1}(\xi)$. Quando x varia nell'intervallo $(\tau^{q+1}(\rho), \tau^{q-1}(\rho)]$ la variabile ξ descrive l'intervallo $(\tau^2(\rho), \mathring{\rho}]$, ove $\mathring{\rho} = \rho$ se $q > -s+1$, e $\mathring{\rho} = \tau^{s}(h)$ se $q = -s+1$. Sia $\nu(\xi) = \gamma[\tau^{q-1}(\xi)]$. Per provare il nostro asserto, basta dimostrare che $\nu(\xi)$ appartiene a $C^n(\tau^2(\rho), \mathring{\rho}]$. Si ha

$$\nu(\xi) \begin{cases} = f[\tau^{-1}(\xi)] & \text{per } \tau^2(\rho) < \xi \leq \tau(\rho), \\ = f(\xi) & \text{per } \tau(\rho) < \xi \leq \mathring{\rho}. \end{cases}$$

Le (9) assicurano che $\nu(\xi)$ appartiene a $C^n(\tau^2(\rho), \mathring{\rho}]$. Inoltre, se $\tau(x)$ appartiene a $C^\infty[0, h]$, $f(x)$ a $C^\infty[\tau(\rho), \rho]$ e se le (9) sono soddisfatte per ogni m, allora $\nu(\xi)$ appartiene a $C^\infty(\tau^2(\rho), \mathring{\rho}]$ e, quindi, $\gamma(x)$ appartiene a $C^\infty(\tau^{q+1}(\rho), \tau^{q-1}(\rho)]$ e, per l'arbitrarietà di q, a $C^\infty(0, h]$. Sia, infine, $\tau(x)$ analitica in $[0, h]$ ed $f(x)$ in $[\tau(\rho), \rho]$. Le (9) siano soddisfatte per ogni m. La $\nu(\xi)$ è somma, in un intorno destro di $\tau(\rho)$, della serie di Taylor, relativa alla $f(\xi)$ e con origine il punto $\tau(\rho)$. Inoltre la $\nu(\xi)$, in un intorno sinistro di $\tau(\rho)$, è somma della serie di Taylor, relativa a $f[\tau^{-1}(\xi)]$ e con origine il punto $\tau(\rho)$. Ma per le (9) – valide per ogni m – le due serie di Taylor coincidono e quindi $\nu(\xi)$ è analitica in $(\tau^2(\rho), \mathring{\rho}]$. Ne viene che $\gamma(x)$ è analitica in $(\tau^{q+1}(\rho), \tau^{q-1}(\rho)]$ ed, in conseguenza, in $(0, h]$.

Sia $\gamma_0(x)$ una funzione definita in $(0, h]$, ivi soluzione della (8) e tale che $\gamma_0(x) = f(x)$ per $\tau(\rho) \leq x \leq \rho$. Fissato x, sia q l'intero dianzi introdotto. Poniamo, come sopra, $\xi = \tau^{-q+1}(x)$. Si ha $\gamma_0(x) = \gamma_0[\tau^{q-1}(\xi)] = \gamma_0(\xi)$. Ma, poiché riesce $\tau(\rho) < \xi \leq \mathring{\rho}$, avremo $\gamma_0(x) = f(\xi) = f[\tau^{-q+1}(x)]$. Quindi $\gamma_0(x) = L_\rho f$.

Osservazione. – Le condizioni (9), che abbiamo dimostrato essere *sufficienti* per l'esistenza della $\gamma(x)$, sono altresì *necessarie*, come – ovviamente – si constata.

Il modo come è stato definito l'operatore $L_\rho f$ permette di descrivere in modo esauriente il tipo di singolarità che $\gamma(x)$ ha per $x \to 0^+$. È intanto evidente che, detti m ed M, rispettivamente, il minimo e il massimo di $f(x)$ in $[\tau(\rho), \rho]$, si ha

$$\min \lim_{x \to 0^+} \gamma(x) = m \quad , \quad \max \lim_{x \to 0^+} \gamma(x) = M .$$

Il grafico mostrato nella fig. 2 indica l'andamento della $\gamma(x)$ nell'intervallo $(0, h]$. Il grafico della $f(x)$ è marcato in grassetto.

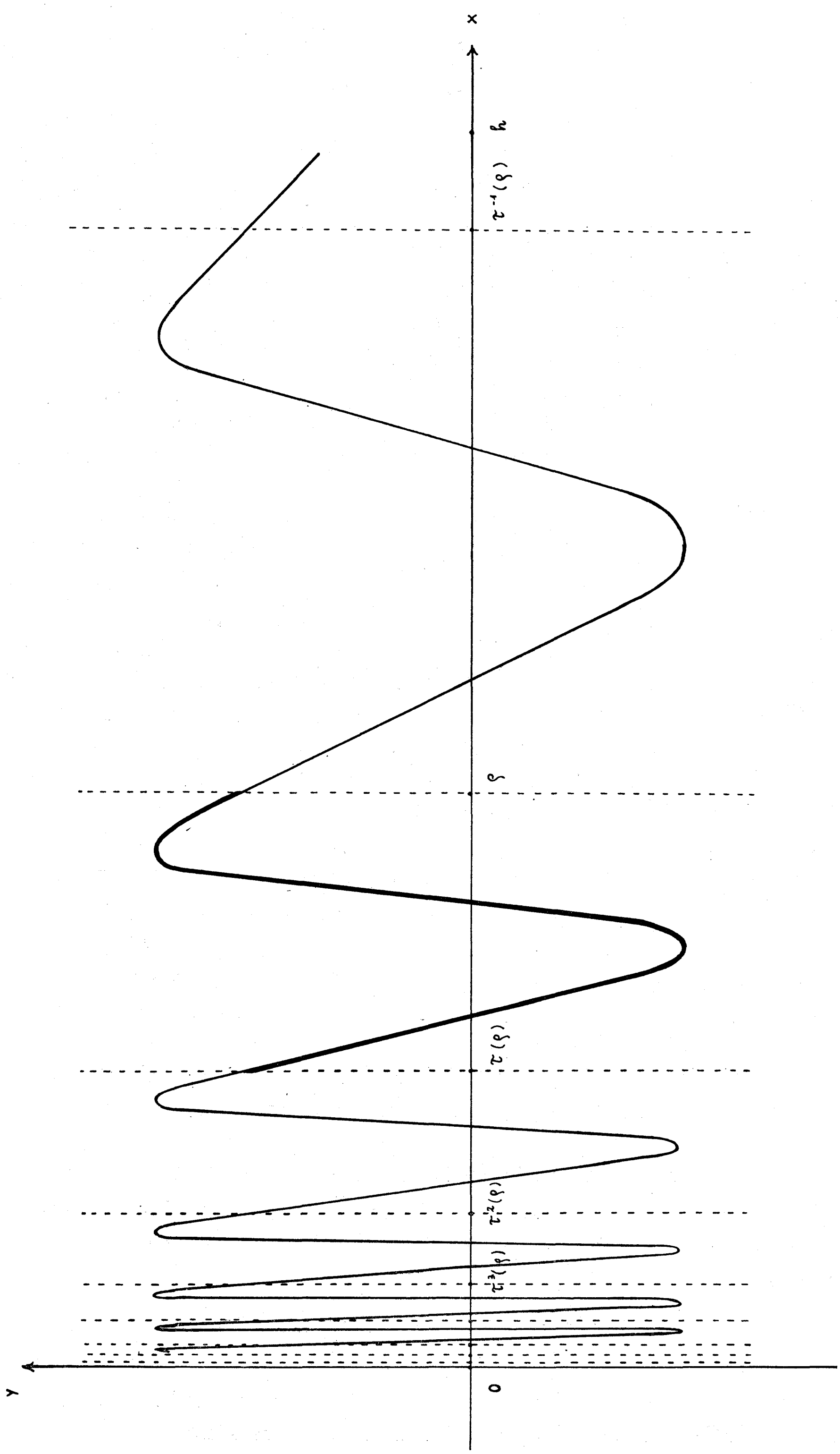

Fig. 2.

La $\gamma(x)$ avrà limite per $x \to 0^+$ se e solo se riesce $f(x) \equiv c$ in $[\tau(\rho), \rho]$, essendo c una costante. In tal caso sarà in $(0, h] : \gamma(x) \equiv c$.

È evidente che, per quanto concerne $\gamma'(x)$, avremo, se $f(x)$ non è costante in $[\tau(\rho), \rho]$:

$$\min_{x \to 0^+} \lim \gamma'(x) = -\infty \quad , \quad \max_{x \to 0^+} \lim \gamma'(x) = +\infty .$$

2. PROBLEMA DI GOURSAT E PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE $u_{xy} = 0$.

Consideriamo ora il problema di Goursat, relativo al rettangolo R_ε, enunciato nell'introduzione. Sia in R_ε

$$u(x, y) = A(x) + B(y) \quad , \quad A(1) = 0 \tag{11}$$

con $A(x)$ definita in $[\varepsilon, 1]$ e $B(y)$ in $[\beta(\varepsilon), \sigma]$.

Dalle (2), (11) si trae

$$A[\alpha^{-1}(y)] + B(y) = \varphi_1[\alpha^{-1}(y)] \quad , \quad A[\beta^{-1}(y)] + B(y) = \varphi_2[\beta^{-1}(y)] \tag{12}$$

e, quindi, pòsto:

$$\beta^{-1}(y) = x \quad , \quad \mu(x) = \alpha^{-1}\beta(x) \quad , \quad P(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1[\mu(x)] ,$$

si ottiene

$$A(x) - A[\mu(x)] = P(x) \qquad (\varepsilon \leq x \leq 1). \tag{13}$$

Poniamo:

$$x = 1 - \xi \quad , \quad \tilde{A}(\xi) = A(1 - \xi) \quad , \quad \tilde{P}(\xi) = P(1 - \xi) , \tag{14}$$
$$\tau(\xi) = 1 - \mu(1 - \xi) .$$

La (13) diventa

$$\tilde{A}(\xi) - \tilde{A}[\tau(\xi)] = \tilde{P}(\xi) \qquad (0 \leq \xi \leq 1 - \varepsilon).$$

Per essa si constata che può applicarsi la teoria svolta nel n. 1. Poiché riesce $\tilde{A}(0) = 0$, si avrà

$$\tilde{A}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}[\tau^k(\xi)]$$

e, quindi, tenendo conto delle posizioni (14) e delle (12),

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P[\mu^k(x)] \quad , \quad B(y) = \varphi_2[\beta^{-1}(y)] - \sum_{k=0}^{\infty} P[\mu^k \beta^{-1}(y)] . \tag{15}$$

La funzione data dalla (11) – dove A e B sono definite dalle (15) – riuscirà, allora, per l'arbitrarietà di ε, definita in tutto R'. Essa sarà continua in R' con le sue derivate fino all'ordine n, se $\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2$ sono contenute in $C^n[0,1]$ $(n \geq 1)$. Se tali funzioni appartengono a $C^\infty[0,1]$, allora $u(x,y)$ avrà in R' derivate continue di qualsivoglia ordine. Infine, se $\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2$ sono analitiche in $[0,1]$, la $u(x,y)$ sarà *analitica in* R', riuscendo ovvio il significato da attribuire a tale dizione. Si può quindi dire che *la soluzione del problema di Goursat possiede in ogni* R_ε *la stessa regolarità che hanno i «dati»*.

La $u(x,y)$, considerata in R', è la soluzione del problema, enunciato nell'introduzione, che consiste nell'assegnare ad una soluzione dell'equazione $u_{xy} = 0$ i valori sul contorno costituito da Γ_1 e Γ_2 (problema del tipo di Dirichlet).

La teoria svolta nel n° 1 ci permette di determinare le singolarità di $A(x)$ e $B(y)$ per $x \to 0^+$ e $y \to 0^+$. Dalle (1), (11) si trae per $0 < x \leq 1$:

$$A(x) + B[\alpha(x)] = \varphi_1(x) \quad , \quad A(x) + B[\beta(x)] = \varphi_2(x), \tag{16}$$

e quindi, pòsto:

$$\beta(x) = y \quad , \quad \tau(y) = \alpha\beta^{-1}(y) \quad , \quad Q(y) = \varphi_2[\beta^{-1}(y)] - \varphi_1[\beta^{-1}(y)],$$

avremo

$$B(y) - B[\tau(y)] = Q(y) \qquad (0 < y \leq \sigma). \tag{17}$$

Fissiamo un h tale che $0 < h < \sigma$. Se consideriamo la (17) per $0 < y \leq h$, ad essa può applicarsi la teoria svolta nel n° 1. Supponiamo $\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2$ appartenenti a $C^n[0,1]$ $(n \geq 1)$. Sia $g(y)$ la funzione appartenente a $C^n[0,h]$ e tale che

$$g(y) - g[\tau(y)] = Q(y) \quad , \quad g(0) = 0.$$

Pòsto $\gamma(y) = B(y) - g(y)$, scegliamo un arbitrario ρ tale che $0 < \rho \leq h$. Avremo allora

$$\gamma(y) = L_\rho[B(y) - g(y)]$$

e, quindi, per $0 < y \leq h$, tenendo presente la seconda delle (15),

$$B(y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q[\tau^k(y)] + L_\rho \left\{ \varphi_2[\beta^{-1}(y)] - \sum_{k=0}^{\infty} P[\mu^k \beta^{-1}(y)] - \sum_{k=0}^{\infty} Q[\tau^k(y)] \right\}$$

e per la seconda delle (16), per $0 < x < \beta^{-1}(h)$

$$A(x) = \varphi_2(x) - B[\beta(x)].$$

Poiché le funzioni $g(y)$ e $\varphi_2(x)$ sono regolari per $y \to 0^+$ e $x \to 0^+$, rimane dimostrato che le singolarità di $B(y)$ e $A(x)$ per $y \to 0^+$ e $x \to 0^+$ sono quelle delle funzioni rappresentate dall'operatore L_ρ e descritte nel n. 1. La $B(y)$

è regolare per $y \to 0^+$ (e quindi la $A(x)$ per $x \to 0^+$) se e solo se riesce in $[\tau(\rho), \rho]$

$$\Phi(y) \equiv \varphi_2[\beta^{-1}(y)] - \sum_{k=0}^{\infty} P[\mu^k \beta^{-1}(y)] - \sum_{k=0}^{\infty} [Q\tau^k(y)] \equiv c,$$

essendo c una costante. Un calcolo elementare prova che $\Phi(\rho) = \Phi[\tau(\rho)]$ e quindi $c = \Phi(\rho) = \Phi[\tau(\rho)]$. Pertanto deve essere in $[\tau(\rho), \rho]$

$$\varphi_2[\beta^{-1}(y)] - \sum_{k=0}^{\infty} P[\mu^k \beta^{-1}(y)] - \sum_{k=0}^{\infty} Q[\tau^k(y)] = \Phi(\rho). \tag{18}$$

D'altra parte, essendo $B - g$ una funzione di $C^n(0, h]$, deve essere

$$\left[\frac{d^m \Phi}{dy^m}\right]_{y=\tau(\varrho)} = 0 \quad , \quad \left[\frac{d^m \Phi}{dy^m}\right]_{y=\varrho} = 0 \qquad (m = 1, \cdots, n). \tag{19}$$

La (18) e le (19) costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare i dati perché esista in R una soluzione del problema pòsto, continua in R assieme a tutte le derivate fino all'ordine n. Nel caso $n = 1$ la (18) e le (19) si riconducono, mediante calcoli elementari, alle condizioni – di forma assai più espressiva – trovate nella Nota [2]. È ovvio che se i dati appartengono a $C^\infty[0, h]$, per avere una soluzione del problema che abbia la stessa regolarità, occorre e basta che sussista la (18) e le (19) siano verificate per ogni m.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. PICONE, *Sulle equazioni alle derivate parziali del second'ordine di tipo iperbolico in due variabili indipendenti*. « Rend. del Circolo Matem. di Palermo », tomo XXX, 2° sem. 349–376 (1910).

[2] G. FICHERA, *Su un problema di Dirichlet per l'equazione* $u_{xy} = 0$. In corso di stampa sugli « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ».

[3] E. GOURSAT, *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*, 1er Mémoire. « Annales des Sciences de l'Université de Toulouse », II série, t. V, pp. 405–436 (1903). 2e Memoire, *ibid.*, II série, t. VI, 117–144 (1904).

[4] M. MASON, *On the linear differential equation of hyperbolic type*. « Matem. Annalen », Bd. LXV, 570–575 (1908).

[5] A. MYLLER, *Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen von hyperbolischen Typus*. « Matem. Annalen », Bd. LXVIII, 75–106 (1910).

[6] A. K. AZIZ e J. B. DIAZ, *On a Mixed Boundary-Value Problem for Linear Hyperbolic Partial Differential Equations in Two Independent Variables*. « Archive for Rational Mechanics and Analysis », *10*, 1–28 (1962).

[7] G. FUBINI, *Alcuni nuovi problemi che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali*. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », *40*, 616–631 (1904–1905).

[8] F. FAA' DI BRUNO, *Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel*. « The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics », *1*, 359–360 (1857).