
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ERALDO GIULI

**Una caratterizzazione degli spazi ad aperti
localmente compatti**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 50 (1971), n.1, p. 24–28.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_1_24_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Topologia. — *Una caratterizzazione degli spazi ad aperti localmente compatti* (*). Nota di ERALDO GIULI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

RÉSUMÉ. — On démontre le théorème suivant: pour qu'un espace topologique Y quelconque, même pas séparé, ait ses ouverts localement compacts, il faut et il suffit que le foncteur « produit par Y » soit canoniquement adjoint au foncteur « $\text{Hom}(Y, \quad)$ » construit par la topologie compacte-ouverte. Le théorème est généralisé aux espaces fibrés sans structure.

Sia $X \times Y$ il prodotto topologico degli spazi X ed Y , $H(Y, Z) = \text{Hom}(Y, Z)$ l'insieme delle applicazioni continue dello spazio Y nello spazio Z , $H_{co}(Y, Z)$ l'insieme $H(Y, Z)$ dotato della topologia compatta-aperta. Ci proponiamo di trovare una condizione necessaria e sufficiente per lo spazio Y affinché, qualunque siano gli spazi X e Z , l'applicazione canonica $\eta: H(X \times Y, Z) \rightarrow H(X, H_{co}(Y, Z))$ sia bigettiva e naturale, sia cioè una aggiunzione tra i funtori $(\times Y)$ e $H_{co}(Y, \quad)$.

R. H. Fox [5] e R. F. Arens [1] hanno provato che, qualunque siano gli spazi X e Z , l'applicazione η è bigettiva se lo spazio Y è localmente compatto e separato.

Successivamente R. F. Arens e J. Dugundji [2] hanno considerato diverse topologie nell'insieme $H(Y, Z)$, provando, tra l'altro, che non sempre esiste una topologia in $H(Y, Z)$ in modo che, per ogni spazio X , sia bigettiva l'applicazione η . R. Brown [3], [4], limitandosi al caso degli spazi separati, ha invece considerato diverse topologie nell'insieme $X \times Y$, mostrando che esiste una opportuna topologia che rende bigettiva l'applicazione η .

Sulla base di quest'ultimo risultato R. Pupier e A. Roux [8] hanno recentemente provato, sempre nell'ipotesi che gli spazi siano separati, il reciproco del risultato di R. H. Fox e R. F. Arens sopra richiamato.

Ebbene, in questa Nota, dimostro che il risultato di R. H. Fox e R. F. Arens vale più in generale per la classe degli spazi, non necessariamente separati, *ad aperti localmente compatti*, e che, per tale classe sussiste anche il risultato inverso. Gli spazi indicati mi sono stati segnalati dal prof. M. Vaccaro come i più adatti a risolvere il problema dell'aggiunzione.

Nel n. 3 generalizzo i risultati ottenuti al caso di spazi fibrati.

1. — SPAZI FUNZIONALI E SPAZI AD APERTI LOCALMENTE COMPATTI

Siano X, Y, Z spazi topologici; ad ogni applicazione α di $X \times Y$ in Z resta associata l'applicazione $\hat{\alpha}$ di X nell'insieme delle applicazioni di Y in Z , definita ponendo, per ogni $x \in X$ e $y \in Y$, $(\hat{\alpha}x)y = \alpha(x, y)$. Viceversa ad

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 gennaio 1971.

ogni applicazione β di X nell'insieme delle applicazioni di Y in Z resta associata l'applicazione $\tilde{\beta}$ di $X \times Y$ in Z , definita ponendo, per ogni $(x, y) \in X \times Y$, $\tilde{\beta}(x, y) = (\beta x)y$. Ovviamente risulta $\tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha$ e $\tilde{\tilde{\beta}} = \beta$.

Denotiamo con $H_\tau(Y, Z)$ lo spazio funzionale ottenuto dotando l'insieme $H(Y, Z)$ delle applicazioni continue di Y in Z della topologia τ . Una topologia τ nell'insieme $H(Y, Z)$ è detta *propria* se per ogni spazio X ed applicazione continua $\alpha: X \times Y \rightarrow Z$ è continua l'applicazione associata $\hat{\alpha}: X \rightarrow H_\tau(Y, Z)$; la topologia τ è detta invece *ammissibile* se per ogni applicazione continua $\beta: X \rightarrow H_\tau(Y, Z)$ è continua l'applicazione associata $\tilde{\beta}: X \times Y \rightarrow Z$. L'ammissibilità di una topologia τ in $H(Y, Z)$ è equivalente alla continuità dell'applicazione $\omega: H_\tau(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$ definita ponendo, per ogni $(f, y) \in H(Y, Z) \times Y$, $\omega(f, y) = fy$ ([2], Theorem (2.2)).

Siano Y, Z spazi topologici, K una parte compatta ⁽¹⁾ di Y , U una parte aperta di Z e $O_{K,U}$ la parte di $H(Y, Z)$ costituita dalle applicazioni continue $f: Y \rightarrow Z$ soddisfacenti la condizione $fK \subset U$; la topologia in $H(Y, Z)$ che ha per sottobase le parti del tipo $O_{K,U}$ è detta *compatta-aperta*; denotiamo con $H_{co}(Y, Z)$ lo spazio funzionale così ottenuto. R. H. Fox ([5], Lemma 1) ha provato:

LEMMA 1.1. — *Qualunque siano gli spazi Y e Z la topologia compatta-aperta in $H(Y, Z)$ è propria.*

Inoltre R. H. Fox ([5], Theorem 1) e R. F. Arens ([1], Theorem 2) hanno provato:

LEMMA 1.2. — *Se lo spazio Y è localmente compatto e separato, qualunque sia lo spazio Z , la topologia compatta-aperta in $H(Y, Z)$ è ammissibile.*

Proviamo ora il seguente

LEMMA 1.3. — *Qualunque siano gli spazi Y e Z la topologia τ in $H(Y, Z)$ che ha per sottobase gli aperti di ognuno dei due tipi*

a) $O_{K,U}$ con K compatto di Y ed U aperto di Z ,

b) $O_{A,U}$ con A aperto non localmente compatto di Y ed U aperto di Z ,
è ammissibile.

Dimostrazione. — Sia $\beta: X \rightarrow H_\tau(Y, Z)$ una applicazione continua, U un aperto di Z e $(x_0, y_0) \in (\tilde{\beta})^{-1}U$; poiché $(\beta x_0)y_0$ appartiene ad U e βx_0 è continua esiste un aperto di Y , sia esso A , con $y_0 \in A$ e $\beta x_0 \in O_{A,U}$. Se l'aperto A non è localmente compatto, $O_{A,U}$ è un aperto di $H(Y, Z)$ ed essendo continua l'applicazione β esiste un aperto V contenente x_0 con $\beta V \subset O_{A,U}$ cioè con $\tilde{\beta}(V \times A) \subset U$; altrimenti, indicato con K un intorno compatto di y_0 contenuto in A , risulta $\beta x_0 \in O_{K,U}$ e quindi, sempre per la continuità dell'applicazione β , esiste un aperto W contenente x_0 con $\beta W \subset O_{K,U}$, cioè con $\tilde{\beta}(W \times K) \subset U$.

(1) Nel concetto di compattezza non è compresa l'ipotesi di separazione.

Uno spazio topologico Y è detto *ad aperti localmente compatti* se per ogni aperto A di Y e $y \in A$ esiste un intorno compatto di y contenuto in A , ossia se gli intorni compatti dei punti di Y costituiscono un sistema fondamentale d'intorni.

Se Y è uno spazio ad aperti localmente compatti, poiché la topologia definita nel Lemma 1.3 coincide, qualunque sia lo spazio Z , con la topologia compatta-aperta, si ha il seguente

COROLLARIO 1.1. - *Se Y è uno spazio ad aperti localmente compatti e Z uno spazio qualsiasi la topologia compatta-aperta in $H(Y, Z)$ è ammissibile.*

Osservazione. - Lo spazio topologico che ha come sostegno l'insieme dei numeri naturali N e come topologia quella che ha per base le parti del tipo $N_p = \{p, p+1, \dots\}$, $p \in N$, è ad aperti localmente compatti ma non è separato. Ogni spazio topologico localmente compatto e separato è però ad aperti localmente compatti ([6], Theorem 17, p. 146) e pertanto il corollario 1.1 è una generalizzazione del Lemma 1.2.

LEMMA 1.4. - *Se $Z = \{0, 1\}$ è lo spazio di Sierpinski, ossia ha per aperti $\emptyset, \{0\}, Z$, e la topologia compatta-aperta in $H(Y, Z)$ è ammissibile, lo spazio Y è ad aperti localmente compatti.*

Dimostrazione. - Supponiamo che la topologia compatta-aperta in $H(Y, Z)$ sia ammissibile, ossia che risulti continua l'applicazione $\omega: H_{co}(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$. Sia A un aperto di Y , a un punto di A ed $f: Y \rightarrow Z$ l'applicazione continua definita ponendo $fy = 0$ se $y \in A$ e $fy = 1$ se $y \in CA$; per la continuità dell'applicazione ω esiste un compatto di Y , sia esso K , ed un intorno di a , sia esso V , tali che risulti $(f, a) \in O_{K, \{0\}} \times V$ e $\omega(O_{K, \{0\}} \times V) = 0$. Risulta allora $K \subset A$ e $V \subset A$; inoltre, per ogni aperto B di Y contenente K , appartenendo ad $O_{K, \{0\}}$ l'applicazione continua $g: Y \rightarrow Z$ definita da $gy = 0$ se $y \in B$ e $gy = 1$ se $y \in CB$, risulta $V \subset B$. Ne segue che ogni ricoprimento aperto di K è un ricoprimento di $V \cup K$, e quindi che, per essere K un compatto, è un compatto anche $V \cup K$. Se ne conclude che l'intorno $K \cup V$ di a è contenuto in A ed è compatto.

2. - AGGIUNZIONE TRA I FUNTORI $(\times Y)$ e $H_{co}(Y,)$

Siano $\mathcal{T}$ la categoria delle applicazioni continue di spazi topologici, Y uno spazio topologico e $(\times Y), H_{co}(Y,): \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ i due funtori usuali; per ogni coppia (X, Z) di spazi topologici sia inoltre $\eta_{(X, Z)}: H(X \times Y, Z) \rightarrow H(X, H_{co}(Y, Z))$ l'applicazione definita ponendo, per ogni applicazione continua $\alpha: X \times Y \rightarrow Z$, $\eta_{(X, Z)}\alpha = \hat{\alpha}$. Per il Lemma 1.1 l'applicazione $\eta_{(X, Z)}$ è ben definita qualunque siano gli spazi X e Z .

TEOREMA 2.1. - $\eta = \{\eta_{(X, Z)}\}_{(X, Z) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}}$ è una aggiunzione tra i funtori $(\times Y)$ e $H_{co}(Y,)$ se e solo se lo spazio Y è ad aperti localmente compatti.

Dimostrazione. — Si riconosce facilmente che, qualunque siano gli spazi Y, X, Z, X', Z' e le applicazioni continue $f: X' \rightarrow X, g: Z \rightarrow Z'$, è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H(X \times Y, Z) & \xrightarrow{\eta_{(X,Y)}} & H(X, H_{co}(Y, Z)) \\ \downarrow H(f \times I_Y, g) & & \downarrow H(f, H(I_Y, g)) \\ H(X' \times Y, Z') & \xrightarrow{\eta_{(X',Z')}} & H(X', H_{co}(Y, Z')), \end{array}$$

ossia che, qualunque sia lo spazio Y , η è una trasformazione naturale tra i bifuntori (a valori nella categoria delle applicazioni d'insiemi) $H(\times Y,)$ e $H(, H_{co}(Y,))$; che essa sia poi una equivalenza naturale se e solo se lo spazio Y è ad aperti localmente compatti segue, rispettivamente, dal Corollario 1.1 e dal Lemma 1.4.

3. — GENERALIZZAZIONE AGLI SPAZI FIBRATI

Il Teorema 2.1 si generalizza in modo naturale agli spazi fibrati senza struttura. Per far ciò diamo innanzitutto alcune definizioni. Un fibrato $\mathbf{F} = F \xrightarrow{q} Y$ è detto *proprio* se la controimmagine $q^{-1}K$ di ogni compatto K dello spazio base Y è un compatto dello spazio delle fibre F . Il fibrato $\mathbf{F}$ è detto *ad aperti localmente compatti* se tali sono sia F che Y .

Sia $\mathbf{F} \equiv F \xrightarrow{q} Y$ un fibrato proprio con q suriettiva, $\mathbf{G} = G \xrightarrow{r} Z$ un qualunque fibrato e $t: Y \rightarrow F$ una sezione di $\mathbf{F}$ non necessariamente continua. L'applicazione $(q, r): H_{co}(F, G) \rightarrow H_{co}(Y, Z)$, definita ponendo, per ogni $f \in H_{co}(F, G)$, $(q, r)f = rft$ è continua per essere $\mathbf{F}$ un fibrato proprio. Denotiamo con $\mathbf{H}_{co}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ il fibrato funzionale dato dall'applicazione continua (q, r) .

Siano ora $\mathfrak{F}$ la categoria dei morfismi di fibrati, $\mathbf{F} \equiv F \xrightarrow{q} Y$ un fibrato proprio con q suriettiva e $(\times \mathbf{F}), H_{co}(\mathbf{F},): \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ i due funtori usuali; per ogni coppia di fibrati $(\mathbf{E}, \mathbf{G})$ sia inoltre $\eta_{(\mathbf{E}, \mathbf{G})}: H(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}) \rightarrow H(\mathbf{E}, \mathbf{H}_{co}(\mathbf{F}, \mathbf{G}))$ l'applicazione definita ponendo, per ogni morfismo $(\alpha_1, \alpha_2): \mathbf{E} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$, $\eta_{(\mathbf{E}, \mathbf{G})} \cdot (\alpha_1, \alpha_2) = (\eta_{(\mathbf{E}, \mathbf{G})} \alpha_1, \eta_{(X, Z)} \alpha_2)$. Sussiste il seguente

TEOREMA 3.1. — $\eta = \{\eta_{(\mathbf{E}, \mathbf{G})}\}_{(\mathbf{E}, \mathbf{G}) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}}$ è una *aggiunzione* tra i funtori $(\times \mathbf{F})$ e $\mathbf{H}_{co}(\mathbf{F},)$, se e solo se il fibrato proprio $\mathbf{F}$ è ad aperti localmente compatti.

Dimostrazione. — Sia η una equivalenza naturale tra i bifuntori (a valori nella categoria delle applicazioni d'insiemi) $H(\times \mathbf{F},)$ e $H(, \mathbf{H}_{co}(\mathbf{F},))$; posto $G = \{0, 1\}$ (spazio di Sierpinski) e Z puntiforme dal Lemma 1.4 segue che lo spazio delle fibre F è ad aperti localmente compatti; posto invece $G = Z = \{0, 1\}$ e $r = I_G$, sempre dal lemma 1.4, segue che Y è ad aperti localmente compatti. Viceversa se il fibrato proprio $\mathbf{F}$ è ad aperti localmente compatti, dal Corollario 1.1 segue che η è una equivalenza naturale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. F. ARENS, *A topology for spaces of transformations*, « Ann. of Math. », 47, 480-495 (1946).
- [2] R. F. ARENS e J. DUGUNDJI, *Topologies for function spaces*, « Pacific J. of Math. », 1, 5-31 (1951).
- [3] R. BROWN, *Ten topologies for $X \times Y$* , « Quart. J. Math. », 14, 303-319 (1963).
- [4] R. BROWN, *Function spaces and product topologies*, « Quart. J. Math. », 15, 238-250 (1964).
- [5] R. H. FOX, *On topologies for function spaces*, « Bull. Amer. Math. Soc. », 51, 429-432 (1945).
- [6] J. L. KELLEY, *General topology*, Van Nostrand, 1955.
- [7] B. MITCHELL, *Theory of Categories*, Accademic Press, 1965.
- [8] R. PUPIER e A. ROUX, *Une caractérisation des espaces localement compacts*, « C. R. Acad. Sc. Paris », 910-911 (1968).