Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franco Bocchio

Su una interpretazione delle linee di livello e dimassima pendenza di una superficie nel campo di gravità

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.6, p. 423–425.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_6_423_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Geodesia. — *Su una interpretazione delle linee di livello e di massima pendenza di una superficie nel campo di gravità.* Nota di FRANCO BOCCHIO, presentata (*) dal Socio A. MARUSSI.

SUMMARY. — A conformal representation is considered which transforms into geodesics the lines of a class of trajectories described by mass points on a surface embedded in a potential field. The lines of equal scale factor of the transformation and their orthogonal trajectories correspond, respectively, to the lines of equal level and of maximum slope of the surface.

1. Si definiscono, col Commessatti [1], come linee idrodinamiche le traiettorie che verrebbero descritte da un punto materiale M abbandonato senza velocità iniziale su una superficie liscia Σ sotto l'azione della gravità. È noto che in queste condizioni la traiettoria descritta dal punto è tale da rendere minima l'azione A

(1.1) $$A = \int \sqrt{2\,m\,(E - W)}\, ds$$

in cui E rappresenta l'energia totale del punto materiale, m la sua massa, W il potenziale di gravità.

Se si pone

(1.2) $$d\bar{s}^2 = 2\,m\,(E - W)\, ds^2$$

la (1.1) può scriversi

(1.3) $$A = \int d\bar{s}$$

e perciò la traiettoria $\mathfrak{J}$ descritta da M può interpretarsi come geodetica $\bar{\mathfrak{J}}$ di una superficie $\bar{\Sigma}$ il cui elemento lineare sia (1.2).

È pertanto possibile istituire tra la superficie Σ di metrica

(1.4) $$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

e la superficie $\bar{\Sigma}$ di metrica

(1.5) $$d\bar{s}^2 = 2\,m\,(E - W)\, a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \bar{a}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

una rappresentazione conforme il cui modulo di deformazione lineare sia $\sqrt{2\,m\,(E - W)}$ che trasformi in geodetiche di $\bar{\Sigma}$ le linee idrodinamiche di Σ.

Si osserva che la rappresentazione in esame ha significato solo quando si considerino linee idrodinamiche alle quali si associ la stessa energia totale del punto materiale; solo così infatti il modulo di deformazione è funzione univoca dei punti della superficie.

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1970.

Risulta chiaro come da queste considerazioni discenda una nuova interpretazione delle linee di livello e di massima pendenza di una superficie; tali linee possono essere infatti viste come le isometre e le isomorfe rispettivamente, di una rappresentazione conforme che trasformi in geodetiche le linee idrodinamiche della superficie.

2. È di un certo interesse il fatto che ai risultati precedenti si possa pervenire considerando la relazione tra la curvatura geodetica di una linea idrodinamica e la sua trasformata in una rappresentazione conforme [9]:

$$\bar{\gamma} = e^{-\mu}(\gamma - \mu_{/\alpha}\,\nu^{\alpha}) \tag{2.1}$$

in cui μ è il logaritmo naturale del modulo di deformazione, $\bar{\gamma}$ la trasformata di γ e ν^{α} il versore della normale a $\mathfrak{I}$ in forma controvariante.

Si dimostra [5], [6], che tra l'impulso del punto materiale e la sua azione sussiste la relazione

$$m\bar{v} = \operatorname{grad} \mathrm{A} \tag{2.2}$$

oppure, in forma tensoriale

$$mv\lambda_{\alpha} = \mathrm{A}_{/\alpha} \tag{2.3}$$

essendo λ_{α} il versore della tangente a $\mathfrak{I}$ in forma covariante. L'accelerazione a_{α} del punto, definita dalla

$$a_{\alpha} = v\,\frac{\delta(v\lambda_{\alpha})}{\delta s} \tag{2.4}$$

può anche scriversi [3]:

$$a_{\alpha} = v\,\frac{\delta(v\lambda_{\alpha})}{\delta s} = \frac{v}{m}\,\mathrm{A}_{/\alpha\beta}\,\lambda^{\beta} = \frac{v}{m}\,\mathrm{A}_{/\beta\alpha}\,\lambda^{\beta} = \tag{2.5}$$

$$= \frac{v}{m}\,(\mathrm{A}_{/\beta}\,\lambda^{\beta})_{/\alpha} - \frac{v}{m}\,\mathrm{A}_{/\beta}\,\lambda^{\beta}{}_{/\alpha} = \frac{v}{m}\,(\mathrm{A}_{/\beta}\,\lambda^{\beta})_{/\alpha} - v^{2}\,\lambda_{\beta}\,\lambda^{\beta}{}_{/\alpha} = \frac{v}{m}\,(\mathrm{A}_{/\beta}\,\lambda^{\beta})_{/\alpha} = vv_{/\alpha}$$

essendo $v_{/\alpha}$ il gradiente superficiale della velocità scalare. Poiché è

$$(ln\sqrt{2\,m\,(\mathrm{E} - \mathrm{W})})_{/\alpha} = \frac{\mathrm{T}_{/\alpha}}{2\,\mathrm{T}} \tag{2.6}$$

ove

$$\mathrm{T} = \mathrm{E} - \mathrm{W} = \frac{1}{2}\,mv^{2}$$

e inoltre

$$\mathrm{T}_{/\alpha} = mvv_{/\alpha}$$

si ha immediatamente

$$v_{/\alpha} = v\,(ln\sqrt{2\,m\,(\mathrm{E} - \mathrm{W})})_{/\alpha}\,. \tag{2.7}$$

Dalle (2.5) e (2.7) si ha quindi

$$a_{\alpha} = v^{2}\,(ln\sqrt{2\,m\,(\mathrm{E} - \mathrm{W})})_{/\alpha}\,. \tag{2.8}$$

All'accelerazione del punto può essere data anche l'espressione [8] seguente

$$a_\alpha = \frac{\delta(v\lambda_\alpha)}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda_\alpha + v\frac{\delta\lambda_\alpha}{\delta t} = \tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\lambda_\alpha + v^2\frac{\delta\lambda_\alpha}{\delta s} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\lambda_\alpha + \gamma v^2 \nu_\alpha .$$

Confrontando la (2.5) e la (2.9) si ottiene

$$v v_{/\alpha} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\lambda_\alpha + \gamma v^2 \nu_\alpha \tag{2.10}$$

che moltiplicata scalarmente per ν_α fornisce

$$\gamma = \frac{v_{/\alpha}\nu^\alpha}{v} \tag{2.11}$$

che può anche scriversi

$$\gamma = (ln\sqrt{2\,m\,(\mathrm{E}-\mathrm{W})})_{/\alpha}\,\nu^\alpha . \tag{2.12}$$

Quando si assuma

$$\mu = ln\sqrt{2\,m\,(\mathrm{E}-\mathrm{W})} \tag{2.13}$$

dal teorema di Schols si vede subito che

$$\overline{\gamma} = 0 \tag{2.14}$$

la quale conferma che le linee $\overline{\mathfrak{J}}$ sono geodetiche di $\overline{\Sigma}$.

Si sottolinea infine l'analogia formale tra i risultati trovati e quelli ottenuti da Hotine [2] e Marussi [9], [10], nello studio di alcune applicazioni geodetiche delle rappresentazioni conformi in tre dimensioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] COMMESSATTI A., « Enciclopedia delle Matematiche Elementari », vol. II, parte II, pp. 362.

[2] HOTINE M., *Geodetic Applications of conformal transformations in three Dimensions*, Atti del III Simposio di Geodesia Matematica, Torino 1965.

[3] *Loc. cit.*, pp. 20.

[4] MOISEIWITSCH B. L., *Variational Principles*, John Wiley & Sons, pp. 24. London 1966.

[5] *Loc. cit.*, pp. 39.

[6] TER HAAR D., *Elements of Hamiltonian Mechanics*, « North-Holland Publishing Company », pp. 122. Amsterdam 1961.

[7] TAUCER G., *Alcune considerazioni sul teorema di Schols*, « Boll. di Geodesia e Sc. Affini », *2* (1954).

[8] SOKOLNIKOFF I. S., *Tensor Analysis*, John Wiley & Sons, pp. 213. New York, 1951,

[9] MARUSSI A., *Einige Bemerkungen über die Anwendung der dreidimensionalen Geodäsie, Festschrift* « W. Grossmann », 5 gennaio 1967.

[10] MARUSSI A., *Un'analogia fra le leggi della propagazione della luce in mezzi rifrangenti continui isotropi e le rappresentazioni conformi*, Atti della Fondazione G. Ronchi, Anno VIII, n. 1 (1953).