
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIUSEPPE GRIOLI

Microstrutture. Nota II

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 49 (1970), n.6, p. 379–385.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_6_379_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Microstrutture* (*). Nota (**) II del Corrisp.
GIUSEPPE GRIOLI.

SUMMARY. — Continuing the first lecture with the same title, sufficient conditions which characterize from a mathematical point of view a microstructure with large deformations corresponding to a physical model are established and the general equations on thermodynamical bases are obtained.

In una Nota precedente [1] ho stabilito delle premesse geometriche e cinematiche utili per la formulazione di una teoria molto generale delle microstrutture con deformazioni finite.

Qui si precisano le condizioni cui (almeno) deve soddisfare un continuo affinché esso possa interpretarsi quale schema matematico di una microstruttura e se ne stabiliscono le equazioni generali in presenza, eventualmente, di azioni dissipative.

1. PASSAGGIO DALLO SCHEMA PARTICELLARE A QUELLO CONTINUO. — Si vuole schematizzare il solido S in un continuo tridimensionale non di tipo classico ma tale che rimanga qualche traccia della sua provenienza particellare. Nello schema che si formulerà non vi sarà traccia esplicita dell'interazione tra particelle appartenenti a una medesima molecola o a due molecole distinte ma solo di un'interazione globale tra molecole, la quale avrà tuttavia delle conseguenze sullo schema matematico che si attuerà.

La struttura considerata in [1] suggerisce l'idea che un continuo derivante dallo schema particellare ivi considerato debba presentare almeno i seguenti requisiti che, d'altronde, sono sufficienti per caratterizzarne lo schema matematico.

a) Per il continuo nello stato attuale C' è definibile una densità μ' , essendo μ quella dello stato di riferimento C .

b) La corrispondenza tra lo stato di riferimento e quello attuale è caratterizzata da un campo di vettori ⁽¹⁾ $u_r = x_r - y_r$ e da una matrice $\gamma_{rs}(P, C, C')$.

c) Esiste un campo di vettori F'_r e due matrici M_{rs}, M'_{rs} tali che il lavoro delle forze di massa nel passaggio dalla configurazione C' a una

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Presentata nella seduta del 14 novembre 1970.

(1) Si manterranno le notazioni di [1]. I richiami alle formule di [1] saranno fatte premettendo una L , quelle alle formule di [2] premettendo invece una A .

vicinissima $C' + \delta C'$ sia espresso, in corrispondenza all'unità di massa di C' , proprio dalla (L, 6) con la conseguente variante (L, 12) [senza, però, che le M_{rs}, M'_{rs}, M'_r abbiano necessariamente espressioni del tipo (L, 7), (L, 8)]. Il significato di M'_r è, naturalmente, quello di momento delle coppie di massa.

d) Esiste un campo di vettori f'_r e due matrici m'_{rs}, m_{rs} definiti i primi due sulla frontiera σ' di C' e la terza su quella, σ , di C , tali che il lavoro delle forze esterne superficiali nel passaggio dalla configurazione attuale C' a una vicinissima $C' + \delta C'$, sia espresso in corrispondenza all'elemento superficiale $d\sigma'$ (o $d\sigma$), da

$$(1) \quad \delta \mathcal{L}^{(e)} = d\sigma' [f'_r \delta u_r + m'_{rs} \delta' \psi_{rs}] = d\sigma [f_r \delta u_r + m_{rs} \delta \gamma_{rs}].$$

Volendo pensare a una discendenza del continuo dallo schema particellare considerato precedentemente in [1], si penserà la (1) derivante dalle azioni esercitate dall'esterno su un sottilissimo strato di molecole contigue alla superficie σ' delimitante C' .

e) Esiste una matrice strutturale A_{rs} - eventualmente dipendente da P - tale che il terzo membro di (L, 16) e (L, 17) possano interpretarsi rispettivamente quali densità di momento delle quantità di moto rispetto a P' e di forza viva ⁽²⁾.

f) Il lavoro virtuale delle forze interne per unità di massa dello stato attuale è una funzione lineare omogenea delle variazioni delle matrici $b, v, v^{(t)}$:

$$(2) \quad \delta \mathcal{L}^{(i)} = Y_{rs} \delta b_{rs} + C_{rs} \delta v_{rs} + C_{rst} \delta v_{rs}^{(t)}.$$

g) l'energia libera, \mathfrak{F} , è una funzione delle matrici $b, v, v^{(t)}$ oltre che delle temperature assolute θ, θ' degli stati C, C' .

Le condizioni f), g) discendono come conseguenza naturale dal contenuto del n. 3 di [1]. In base a quanto è ivi detto e anche a [2], si riconosce che l'espressione $\mathfrak{F} = F(b_{rs}, v_{rs}, v_{rs}^{(t)}, \theta, \theta')$ dell'energia libera soddisfa al principio di indifferenza materiale.

Dalle condizioni c), d) si deduce che per l'intero C' il lavoro virtuale delle forze esterne attive nel passaggio da C' a $C' + \delta C'$ è espresso da

$$(3) \quad \begin{aligned} \delta \mathcal{L}^{(e,a)} &= \int_{C'} \mu' \{ F'_r \delta u_r + M'_{(rs)} \delta' \psi_{rs} + M'_r \delta' \omega_r \} dC' + \\ &+ \int_{\sigma'} \{ f'_r \delta u_r + m'_{(rs)} \delta' \psi_{rs} + m_r \delta' \omega_r \} d\sigma' = \\ &= \int_C \mu \{ F_r \delta u_r + M_{rs} \delta \gamma_{rs} \} dC + \int_{\sigma} \{ f_r \delta u_r + m_{rs} \delta \gamma_{rs} \} d\sigma. \end{aligned}$$

(2) Dopo avere posto $m' = 1$ in (L, 17).

Per il momento delle quantità di moto rispetto al polo fisso O, origine della terna di riferimento, e per la forza viva, si hanno, per l'intero C' , le espressioni

$$(4) \quad K_r^{(0)} = \int_{C'} \mu' \varepsilon_{rln} (x_l \dot{u}_n + \gamma_{ls} \dot{\gamma}_{np} A_{sp}) dC',$$

$$(5) \quad T = \frac{1}{2} \int_{C'} \mu' [\dot{u}^2 + A_{ln} \dot{\gamma}_{rl} \dot{\gamma}_{rm}] dC'.$$

2. DISSIPATIVITÀ. — In base alla condizione $g)$, l'energia libera si deve dunque ritenere funzione delle b_{rs} , ν_{rs} , $\nu_{rs}^{(t)}$, oltre che delle temperature degli stati C e C' , e soddisfa pertanto al principio di indifferenza materiale. In ogni trasformazione reversibile la variazione di \mathfrak{J} corrispondente a una trasformazione isoterma a partire dallo stato attuale uguaglia l'opposto del lavoro delle forze interne. Di conseguenza le condizioni $f)$, $g)$ implicano l'esistenza dello stress

$$(6) \quad Y'_{rs} = - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial b_{rs}} \quad , \quad C'_{rs} = - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \nu_{rs}} \quad , \quad C'_{rst} = - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \nu_{rst}} .$$

A tale stress corrisponde, in ogni ipotetico moto del continuo, la potenza delle forze interne $W^{(r)}$, espressa, per unità di massa, da

$$(7) \quad W^{(r)} = Y'_{rp} \dot{b}_{rp} + C'_{rp} \dot{\nu}_{rp} + C'_{rst} \dot{\nu}_{rst} .$$

Se il sistema non è a trasformazioni reversibili, è naturale interpretare la $W^{(r)}$ come la parte di potenza delle forze interne dovuta a un ipotetico comportamento reversibile del continuo. Del resto, è certamente lecito esprimere l'intera potenza delle forze interne, W , come somma del termine $W^{(r)}$ e di un termine aggiuntivo dovuto alla irreversibilità della trasformazione. In altri termini si è in condizioni di molta generalità supponendo che in presenza di azioni dissipative non ereditarie la densità di potenza delle forze interne sia esprimibile nella forma.

$$(8) \quad W = W^{(r)} + W^{(i)}$$

ove il termine $W^{(i)}$ esprime il contributo della irreversibilità. Anzi, l'espressione (7) suggerisce quali siano le variabili dalle quali dipende, in generale, la $W^{(i)}$. Precisamente, la $W^{(i)}$, in generale, deve ritenersi una funzione delle b_{rs} , ν_{rs} , ν_{rst} , \dot{b}_{rs} , $\dot{\nu}_{rs}$, $\dot{\nu}_{rst}$ la quale si annulla insieme con le sue derivate parziali rispetto alle \dot{b}_{rs} , $\dot{\nu}_{rs}$, $\dot{\nu}_{rst}$ quando tali variabili assumano valori nulli. Ciò discende dall'idea di un possibile sviluppo in serie di potenze [0, in particolare, di una possibile espressione polinomiale] rispetto alle variabili \dot{b}_{rs} , $\dot{\nu}_{rs}$, $\dot{\nu}_{rst}$ dell'espressione del lavoro delle forze interne [3].

Con riferimento all'unità di massa si denoti con U l'energia interna, con E l'entropia e con Q la quantità di calore assorbita nel tempo unitario. Note leggi termodinamiche implicano

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = Q - W^{(r)} - W^{(i)}, \\ \dot{S} = \dot{U} - \dot{E}\theta - E\dot{\theta}, \\ \theta\dot{E} - Q = \lambda \geq 0. \end{array} \right.$$

Ne segue

$$(10) \quad \dot{S} + E\dot{\theta} + W^{(r)} + W^{(i)} = -\lambda.$$

È evidente che risulta [vedi (6), (7), (8)]

$$(11) \quad \dot{S} + E\dot{\theta} = - \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{b}_{rs}} \right)_{\dot{b}_{rs}=0} \dot{b}_{rs} + \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{v}_{rs}} \right)_{\dot{v}_{rs}=0} \dot{v}_{rs} + \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{v}_{rst}} \right)_{\dot{v}_{rst}=0} \dot{v}_{rst} \right] = -W^{(r)}.$$

Da (10), (11) segue allora

$$(12) \quad W^{(i)} = -\lambda \leq 0.$$

In definitiva si ha, pertanto,

$$(13) \quad W^{(i)} = Y''_{rs} \dot{b}_{rs} + C''_{rs} \dot{v}_{rs} + C''_{rst} \dot{v}_{rst} = -\lambda (b_{rs}, \dot{b}_{rs}, v_{rs}, \dot{v}_{rs}, v_{rst}, \dot{v}_{rst}).$$

I coefficienti di (13), Y''_{rs} , C''_{rs} , C''_{rst} derivano dalla conoscenza della funzione di dissipazione λ e si deve ritenere ⁽³⁾

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y''_{rs} = - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{b}_{rs}} \dot{b}_{rs} \right)^{-1} \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{b}_{rs}}, \\ C''_{rs} = - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{v}_{rs}} \dot{v}_{rs} \right)^{-1} \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{v}_{rs}}, \\ C''_{rst} = - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{v}_{rst}} \dot{v}_{rst} \right)^{-1} \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{v}_{rst}}. \end{array} \right.$$

Per avere l'espressione completa dello stress basta, evidentemente sommare le Y'_{rs} , C'_{rs} , C'_{rst} rispettivamente con le Y''_{rs} , C''_{rs} , C''_{rst} . In particolare, se la λ è una forma quadratica nelle b_{rs} , \dot{v}_{rs} , \dot{v}_{rst} , risulta

$$(15) \quad Y''_{rs} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{b}_{rs}}, \quad C''_{rs} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{v}_{rs}}, \quad C''_{rst} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{v}_{rst}}.$$

Le formule stabilite hanno forma lagrangiana. Per avere l'espressione euleriana dello stress [che individua l'effettivo stress attuale] occorre un'opportuna trasformazione delle (6), (14) ma rinuncio a farlo.

(3) Vedi quanto è detto in [4] con riferimento al caso classico di stress simmetrico. Sarebbe desiderabile un'analoga indagine geometrica sul significato delle (14).

A titolo di esempio desidero considerare soltanto un caso molto semplice. Si osservi innanzitutto che, denotando al solito con la virgola la derivazione rispetto alle coordinate y_s dei punti di C e con la sbarretta quella rispetto alle coordinate x_s dei punti di C', e posto

$$(16) \quad d_{rs} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{r|s} + \dot{u}_{s|r}),$$

si ha

$$(17) \quad \dot{b}_{rs} = 2 x_{t,r} x_{q,s} d_{tq}$$

e quindi

$$(18) \quad d_{rs} = \frac{1}{2 D^2} B_{rt} B_{sq} \dot{b}_{tq},$$

ove B_{rt} denota il complemento algebrico di $x_{r,t}$ nel determinante $D = \|x_{r,s}\|$.

Si supponga

$$(19) \quad \lambda = \frac{q}{2 D^4} B_{it} B_{jq} \dot{b}_{tq} \dot{b}_{v\sigma} \left(B_{iv} B_{j\sigma} - \frac{1}{3} \delta_{lm} \delta_{ij} B_{lv} B_{m\sigma} \right) = \\ = \frac{q}{2 D^4} \left(B_{it} B_{jq} \dot{b}_{tq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{lm} B_{lt} B_{mq} \dot{b}_{tq} \right) \left(B_{i'v} B_{j'q'} \dot{b}_{v'q'} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{\sigma v} B_{\sigma t'} B_{vq'} \dot{b}_{v'q'} \right) \geq 0.$$

Posto

$$(20) \quad d'_{rs} = d_{rs} - \frac{1}{3} \delta_{rs} (d_{11} + d_{22} + d_{33}),$$

da (12), (19), (20) segue

$$(21) \quad W^{(i)} = -2q d'_{ij} d'_{ij}.$$

All'espressione (21) di $W^{(i)}$ corrisponde, in base a (15), (18), (20), la parte irreversibile di stress nello stato attuale (forma euleriana) espressa da

$$(22) \quad \frac{1}{D} Y''_{lm} x_{r,l} x_{s,m} = -\frac{2q}{D} d'_{rs}.$$

Le (21), (22) formalmente coincidono con la parte dissipativa della potenza delle forze interne e dello stress attuale nei fluidi di Navier Stokes. Si deve, tuttavia, osservare che nel caso di una microstruttura l'espressione (19) di λ va presumibilmente ampliata con termini dipendenti dalle $\dot{\nu}_{rs}$, $\dot{\nu}_{rst}$.

3. EQUAZIONI DINAMICHE. — La teoria precedentemente stabilita sulla base dello schema molecolare considerato porta a un'espressione dell'energia libera proprio del tipo di quella postulata in [2] e, nel caso statico, alle equazioni di campo ivi stabilite. Manca ora la dipendenza dalle $b_{rst} = x_{i,r} x_{is,t}$ ammessa come possibile in [2]. Ho preferito adesso limitarmi alle strette conseguenze cui porta il sistema molecolare posto alla base della teoria, senza considerare la possibilità (eventuale) che la \mathfrak{F} dipenda oltre che dalle b_{rs} , ν_{rs} , ν_{rst} , θ , θ' anche da altre variabili.

La parte reversibile dello stress, espressa dalle (A, 22) è sostanzialmente individuata dalle matrici lagrangiane $Y'_{rs}, C'_{rs}, C'_{rst}$ in base a (6). Non considererò, per semplicità, l'eventualità che siano presenti vincoli interni. Volendo stabilire le equazioni dinamiche in presenza di dissipatività, basterà, nelle definizioni (A, 22) delle $\xi_{rs}, \eta_{rst}, T_{rq}$ e nelle successive conseguenti formule, sostituire alle derivate della F rispettivamente le espressioni (4)

$$(23) \quad \rho_{pi} = \frac{\partial F}{\partial b_{pi}} - Y''_{pi}, \quad z_{is} = \frac{\partial F}{\partial v_{is}} - C''_{is}, \quad z_{ist} = \frac{\partial F}{\partial v_{ist}} - C''_{ist},$$

con le $Y''_{pi}, C''_{is}, C''_{ist}$ espresse dalle (14).

Denotando con $T'_{rq}, \xi'_{rs}, \eta'_{rst}$ le espressioni così ottenute dalle (A, 22), le equazioni dinamiche si otterranno dalle (A, 46), (A, 47) sopprimendo in esse i termini nelle Γ_{rpq} , sostituendo in esse [e nelle espressioni delle N_{rs} , ecc.] le $T'_{rq}, \xi'_{rs}, \eta'_{rst}, N'_{rs}, B'_{rst}$ al posto delle $T_{rq}, \xi_{rs}, \eta_{rst}, N_{rs}, B_{rst}$ e aggiungendo nei secondi membri delle (A, 46) i termini esprimenti le forze d'inerzia.

Per ottenere questi ultimi si può ricorrere al principio di Hamilton. Dall'espressione (5) della forza viva [e supposto $\delta \dot{u}_i = \delta \dot{\gamma}_{ri} = 0$ per $t = t_0, t_1$] si deduce

$$(24) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{C'} [\dot{u}^2 + A_{ln} \dot{\gamma}_{rl} \dot{\gamma}_{rn}] dC' = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{C'} [\ddot{u}_i \delta u_i + A_{ln} \ddot{\gamma}_{rl} \delta \gamma_{rn}] dC'.$$

Di conseguenza, tenuto conto dell'espressione (3) del lavoro delle forze esterne attive e di (L, 4), si conclude che le F'_r, M'_{rs} del caso statico vanno ora sostituite con le espressioni $F'_r - \ddot{u}_r, M'_{rs} - A_{ln} \gamma_{sn} \ddot{\gamma}_{rl}$.

In definitiva, le equazioni cui si giunge sono

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} (T'_{rq} + N'_{qr})_{|q} &= \mu' (F'_r - \ddot{u}_r) \\ B'_{ilq|q} - N'_{il} &= \mu' (M'_{il} - A_{pn} \ddot{\gamma}_{i \dots ln}), \\ \varepsilon_{pli} (B'_{ilq|q} + N'_{il}) &= \mu' (M'_p - \varepsilon_{pli} A_{qn} \ddot{\gamma}_{iq} \gamma_{ln}), \end{aligned} \right. \quad (\text{in } C')$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} (T'_{rq} + N'_{qr}) n_q &= f'_r \\ B'_{ilq} n_q &= m'_{il}, \quad \varepsilon_{pli} B'_{ilq} n_q = m'_p, \end{aligned} \right.$$

ove il segno \cup sta a indicare la parte simmetrica rispetto agli indici a cui si riferisce e si deve intendere

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} T'_{rq} = T'_{qr} &= 2 \left(Y''_{pi} - \frac{\partial F}{\partial b_{pi}} \right) x_{r,i} x_{q,p}, \\ N'_{rq} &= \left(C''_{pi} - \frac{\partial F}{\partial v_{pi}} \right) x_{r,p} \gamma_{qi} - \frac{B_{li}}{D} \gamma_{qit} \left(\frac{\partial F}{\partial v_{pit}} - C''_{pit} \right) x_{r,p} x_{l,r}, \\ B'_{ilq} &= \left(C''_{pst} - \frac{\partial F}{\partial v_{pst}} \right) x_{i,p} x_{q,t} \gamma_{ls}. \end{aligned} \right.$$

(4) $F(b_{rs}, v_{rs}, v_{rst}, \theta, \theta')$ rappresenta l'espressione analitica di \mathfrak{J} e deve pertanto intendersi $\mathfrak{J} \equiv F$.

Le equazioni scritte hanno forma euleriana e per il loro studio analitico sarebbe conveniente stabilire la corrispondente forma lagrangiana, ma per brevità rinuncio a farlo. Così pure non mi preoccupo di stabilire le possibili condizioni iniziali.

Nel caso particolare di molecole rigide [Cosserat], nelle (25), (26) vanno soppresse le (25, 2) e le (26, 2), mentre la γ_{rs} acquista il significato di matrice di rotazione.

Se invece si linearizza la teoria e non si tiene conto della parte dissipativa si ricade nel caso delle microstrutture di Mindlin ⁽⁵⁾ [5].

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. GRIOLI, *Microstrutture*, Nota I, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei ».
- [2] G. GRIOLI, *Energia libera e stato tensionale dei continui*. « Annali di Matematica pura ed applicata », S. IV, T. LXXXVII (1970).
- [3] C. TRUESDELL, *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer-Verlag Berlin. Heidelberg. New York (1966).
- [4] H. ZIEGLER, « Angew. Math. Phys. », 9b, 748 (1958); « Ing. Arch. », 30, 410 (1961).
- [5] R. D. MINDLIN, *Microstructure in linear elasticity*, « Arch. Rat. Mech. and Anal. », 16, 51-78 (1964).
- [6] A. C. ERINGEN, *Theory of micropolar elasticity*, « Academic Press Inc. », New York and London.

(5) Vedi anche [6].