
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

DEMETRIO MANGERON, MEHMET N. OĞUZTÖRELI,
NICOLAE PLITEA

Sui moti costretti dei solidi rigidi ed applicazioni all'analisi dei meccanismi spaziali. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 49 (1970), n.5, p. 272–281.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_5_272_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica razionale. — *Sui moti costretti dei solidi rigidi ed applicazioni all'analisi dei meccanismi spaziali.* Nota I di DEMETRIO MANGERON⁽¹⁾, MEHMET N. OĞUZTÖRELI⁽²⁾ e NICOLAE PLITEA⁽³⁾ presentata^(*) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — Starting from their own research work concerned with the any-order reduced accelerations method, the tangential method and the matrix-tensor method [1]–[3], the authors expose a new kinematic study of a set of a rigid body's constrained motions. The obtained results are subsequently applied to the analysis of spatial mechanisms.

1. In una serie dei loro lavori propri aventi alla base alcune *Note lincee* [1]–[3], gli AA. hanno elaborato il *metodo delle accelerazioni ridotte* d'ordine qualunque e di specie qualsivoglia, il *metodo tangenziale* ed il *metodo matriciale-tensoriale* [4]–[6] concernenti la cinematica e la dinamica dei sistemi meccanici con applicazioni all'analisi ed alla sintesi dei meccanismi piani e spaziali. Tali studi sono stati continuati poscia dai vari scienziati soprattutto nella Repubblica Popolare Cinese, negli Stati Uniti d'America e nell'Unione delle Repubbliche Socialiste Sovietiche [7]–[11].

Gli AA., rimandando i lettori per i dettagli algoritmici ed esemplificazioni al *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iasi*, espongono in ciò che segue i risultati concernenti lo studio cinematico di certi moti costretti dei solidi rigidi e ne additano alcune applicazioni all'analisi dei meccanismi spaziali.

2. Si consideri il moto spaziale di un solido rigido sottoposto ai legami tali che i suoi punti A_1, A_2 descrivono rispettivamente due curve note fisse (C_1) e (C_2) , mentre un altro suo punto A_3 si muove rimanendo sempre appoggiato su una superficie fissata (S_3) . Siano

$$(2.1) \quad x_1 = x_1(q) \quad , \quad y_1 = y_1(q) \quad , \quad z_1 = z_1(q) ; \quad q = q(t) ,$$

le equazioni supposte note del moto del punto A_1 rispetto ad un triedro cartesiano fisso O_1xyz (fig. 1) e sia $A_1 (\equiv O) \xi\eta\zeta$ (fig. 2) il triedro cartesiano

(1) Istituto Politecnico di Iasi, Repubblica Socialista di Romania. Al presente Visiting Professor, University of Alberta, Department of Mathematics, Edmonton, Alberta, Canada.

The first of the authors wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

(2) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

(3) Istituto Politecnico di Cluj, Repubblica Socialista di Romania.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1970.

pur esso trirettangolare solidale col corpo rigido considerato (S). Supponiamo inoltre senza menomare la generalità che i punti A_2 e A_3 si trovino rispettivamente sull'asse $O\zeta$ e nel piano $\xi O\zeta$, si ha cioè

$$(2.2) \quad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = 0; \quad \xi_2 = 0, \quad \eta_2 = 0; \quad \eta_3 = 0.$$

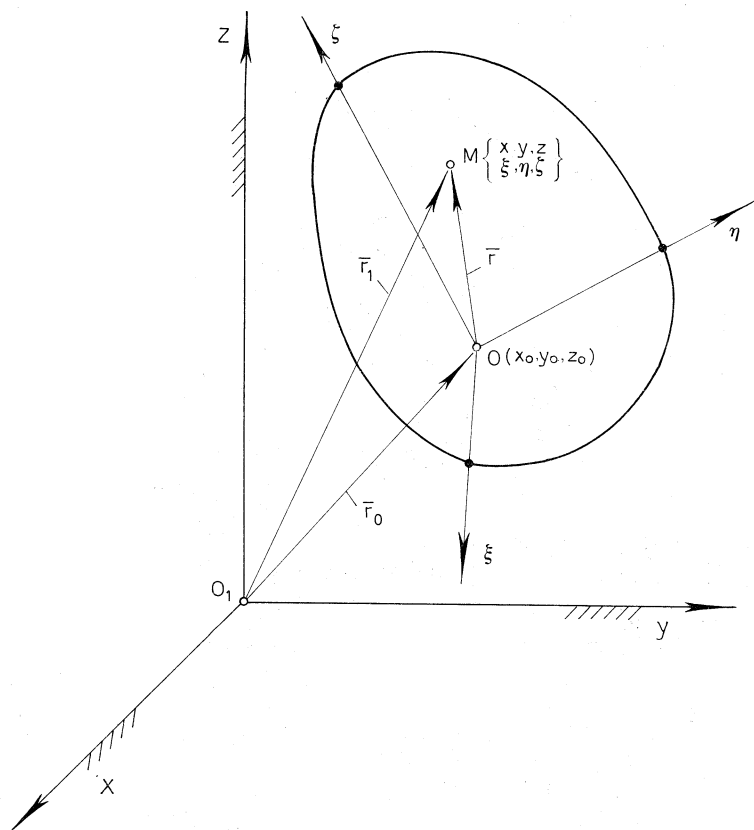


Fig. 1.

Dalle ben note formole [12] che esprimono le coordinate di un punto generico M rispetto al triedro fisso O_1xyz in funzione delle coordinate del punto O e degli angoli di Eulero ψ , φ e θ , si ottiene, ove si tenga conto delle (2.2), il sistema

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 \equiv x_2(\psi, \varphi, \theta) = x_1 + \zeta_2 \sin \psi \sin \theta, \\ y_2 \equiv y_2(\psi, \varphi, \theta) = y_1 - \zeta_2 \cos \psi \sin \theta, \\ z_2 \equiv z_2(\psi, \varphi, \theta) = z_1 + \zeta_2 \cos \theta; \\ x_3 \equiv x_3(\psi, \varphi, \theta) = x_1 + \xi_3 (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) + \xi_3 \sin \psi \sin \theta, \\ y_3 \equiv y_3(\psi, \varphi, \theta) = y_1 + \xi_3 (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta) - \xi_3 \cos \psi \sin \theta, \\ z_3 \equiv z_3(\psi, \varphi, \theta) = z_1 + \xi_3 \sin \varphi \sin \theta + \zeta_3 \cos \theta; \\ f_2(x_2, y_2, z_2) = 0, \quad g_2(x_2, y_2, z_2) = 0; \quad f_3(x_3, y_3, z_3) = 0 \end{array} \right.$$

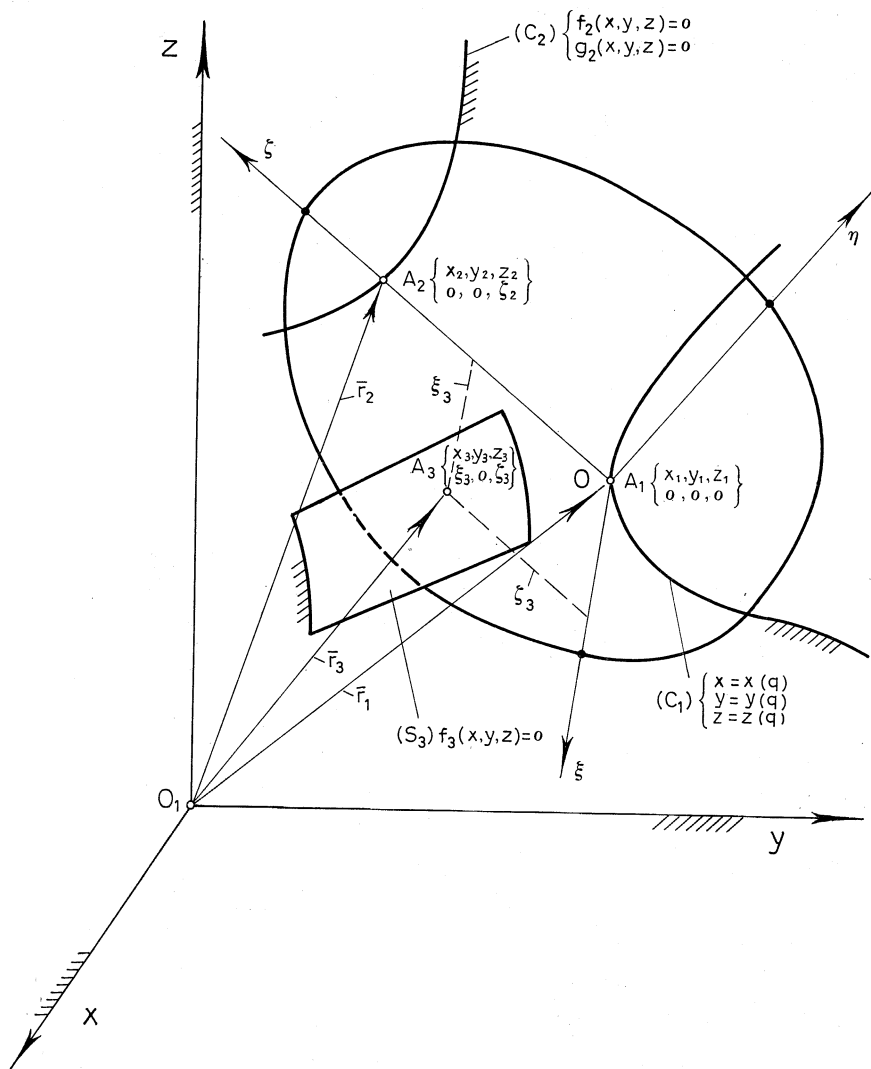


Fig. 2.

e si ha pertanto il

TEOREMA I. - *Nell'ipotesi di cui sopra concernenti il moto costretto di un solido rigido (S), tale moto è dato dalle equazioni*

$$(2.4) \quad \begin{cases} f_2 [x_2(\psi, \varphi, \theta), y_2(\psi, \varphi, \theta), z_2(\psi, \varphi, \theta)] = 0, \\ g_2 [x_2(\psi, \varphi, \theta), y_2(\psi, \varphi, \theta), z_2(\psi, \varphi, \theta)] = 0, \\ f_3 [x_3(\psi, \varphi, \theta), y_3(\psi, \varphi, \theta), z_3(\psi, \varphi, \theta)] = 0. \end{cases}$$

La programmazione dei calcoli alle calcolatrici elettroniche all'uopo di determinazione dal sistema (2.4) degli angoli incogniti di Eulero si consegue,

ad esempio, applicando il metodo delle approssimazioni successive espresso tramite le relazioni matriciali

$$(2.5) \quad \begin{vmatrix} \psi^{(p+1)} \\ \varphi^{(p+1)} \\ \theta^{(p+1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi^{(p)} \\ \varphi^{(p)} \\ \theta^{(p)} \end{vmatrix} - W^{-1}(\psi^{(p)}, \varphi^{(p)}, \theta^{(p)}) \begin{vmatrix} f_2 [x_2(\psi^{(p)}, \varphi^{(p)}, \theta^{(p)}), y_2, z_2] \\ g_2 [x_2(\psi^{(p)}, \varphi^{(p)}, \theta^{(p)}), y_2, z_2] \\ f_3 [x_3(\psi^{(p)}, \varphi^{(p)}, \theta^{(p)}), y_3, z_3] \end{vmatrix}$$

$$(\rho = 0, 1, 2, \dots),$$

essendo $\psi^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ e $\theta^{(0)}$ le valutazioni iniziali di tali angoli, mentre la

$$(2.6) \quad W^{-1}(\psi, \varphi, \theta) = \frac{1}{\det W} W^*$$

è la matrice inversa della matrice di Jacobi

$$(2.7) \quad W(\psi, \varphi, \theta) =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_2 \sin \theta \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cos \psi + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \sin \psi \right) & \zeta_2 \cos \theta \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \sin \psi - \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \cos \psi \right) & 0 \\ \xi_2 \sin \theta \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2} \cos \psi + \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \sin \psi \right) & \zeta_2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2} \sin \psi \cos \theta - \right. & 0 \\ & \left. - \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \cos \psi \cos \theta - \frac{\partial g_2}{\partial z_2} \sin \theta \right) & \\ \left[-\xi_3 (\sin \psi \cos \varphi + \right. & \sin \psi (\xi_3 \sin \varphi \sin \theta + & -\xi_3 [(\cos \psi \sin \varphi + \\ + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) + & + \zeta_3 \cos \theta) \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \cos \psi \cos \theta \cdot & + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta] \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \\ + \zeta_3 \cos \psi \sin \theta] \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + & \cdot (\xi_3 \sin \varphi - \zeta_3) \frac{\partial f_3}{\partial y_3} + & + (\cos \psi \cos \varphi \sin \theta - \\ + [\xi_3 (\cos \psi \cos \varphi - & + (\xi_3 \sin \varphi \cos \theta - \zeta_3 \sin \theta) \frac{\partial f_3}{\partial z_3} & - \sin \psi \sin \varphi] \frac{\partial f_3}{\partial y_3} + \\ - \sin \psi \sin \varphi \sin \theta + & & + \cos \varphi \sin \theta] \frac{\partial f_3}{\partial z_3} \\ + \zeta_3 \sin \psi \sin \theta] \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & & \end{vmatrix}$$

del sistema (2.4), essendo W^* la reciproca della matrice W .

3. Si consideri ora il caso in cui il moto spaziale del solido rigido (S) è tale che le equazioni note del moto di un suo punto $A_1 \in (C_1)$ siano sempre le (2.1), mentre i punti $A_i \in (S)$, ($i = 2, 3, 4$) si appoggiano costantemente sulle superfici dinnanzi fissate (fig. 3)

$$(3.1) \quad f_i(x, y, z) = 0 \quad (i = 2, 3, 4).$$

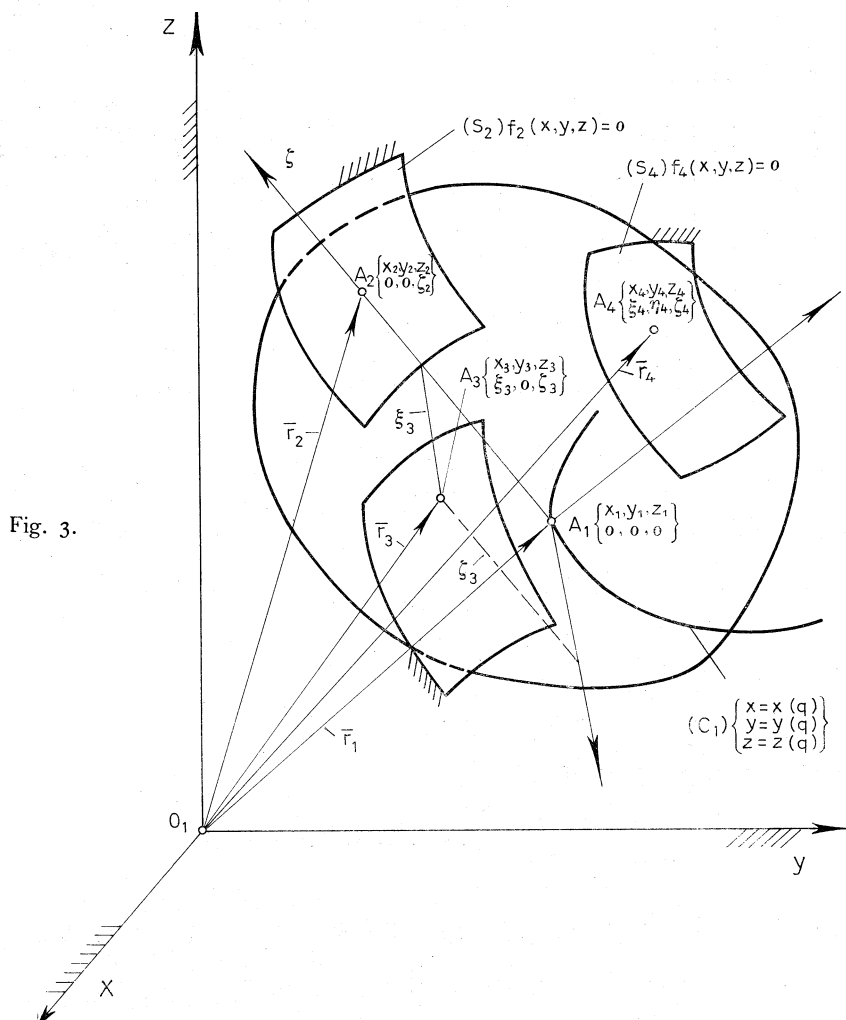


Fig. 3.

Analogamente con ciò che si è fatto per l'ottenimento del sistema (2.3) si perviene in questo caso alle equazioni

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 \equiv x_2(\psi, \varphi, \theta) = x_1 + \zeta_2 \sin \psi \sin \theta, \\ y_2 \equiv y_2(\psi, \varphi, \theta) = y_1 - \zeta_2 \cos \psi \sin \theta, \\ z_2 \equiv z_2(\psi, \varphi, \theta) = z_1 + \zeta_2 \cos \theta; \\ x_3 \equiv x_3(\psi, \varphi, \theta) = x_1 + \xi_3(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) + \zeta_3 \sin \psi \sin \theta, \\ y_3 \equiv y_3(\psi, \varphi, \theta) = y_1 + \xi_3(\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta) - \zeta_3 \cos \psi \sin \theta, \\ z_3 \equiv z_3(\psi, \varphi, \theta) = z_1 + \xi_3 \sin \varphi \sin \theta + \zeta_3 \cos \theta; \\ x_4 \equiv x_4(\psi, \varphi, \theta) = x_1 + \xi_4(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) - \\ \quad - \eta_4(\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) + \zeta_4 \sin \psi \sin \theta, \\ y_4 \equiv y_4(\psi, \varphi, \theta) = y_1 + \xi_4(\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta) + \\ \quad + \eta_4(-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta) - \zeta_4 \cos \psi \sin \theta, \\ z_4 \equiv z_4(\psi, \varphi, \theta) = z_1 + \xi_4 \sin \varphi \sin \theta + \eta_4 \cos \varphi \sin \theta + \zeta_4 \cos \theta; \\ f_2(x_2, y_2, z_2) = 0, \quad f_3(x_3, y_3, z_3) = 0, \quad f_4(x_4, y_4, z_4) = 0 \end{array} \right.$$

e si ha pertanto il

TEOREMA 2. — *Nelle ipotesi di cui sopra concernenti il moto costretto di un solido rigido (S), tale moto è dato dalle equazioni*

$$(3.3) \quad \begin{cases} f_2 [x_2(\psi, \varphi, \theta), y_2(\psi, \varphi, \theta), z_2(\psi, \varphi, \theta)] = 0, \\ f_3 [x_3(\psi, \varphi, \theta), y_3(\psi, \varphi, \theta), z_3(\psi, \varphi, \theta)] = 0, \\ f_4 [x_4(\psi, \varphi, \theta), y_4(\psi, \varphi, \theta), z_4(\psi, \varphi, \theta)] = 0. \end{cases}$$

La programmazione dei calcoli alle calcolatrici elettroniche all'uopo di determinazione del sistema (3.3) degli angoli incogniti di Eulero si consegue tramite le relazioni matriciali di approssimazioni successive analoghe alle (2.5), essendo la matrice di Jacobi del sistema (3.3) data come sotto:

$$(3.4) \quad W(\psi, \varphi, \theta) =$$

$$\begin{array}{ccc} \xi_2 \sin \theta \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cos \psi + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \sin \psi \right) & \xi_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \sin \psi \cos \theta - \right. & 0 \\ & \left. - \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \cos \psi \cos \theta - \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \sin \theta \right) & \\ \\ \left[-\xi_3 (\sin \psi \cos \varphi + \right. & \sin \psi (\xi_3 \sin \varphi \sin \theta + & -\xi_3 [(\cos \psi \sin \varphi + \\ + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) + & + \zeta_3 \cos \theta] \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + & + \sin \psi \cos \theta) \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \\ + \zeta_3 \cos \psi \cos \varphi \left. \right] \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + & + \cos \psi \cos \theta (\xi_3 \sin \varphi - \xi_3) \cdot & + (\cos \psi \cos \varphi \sin \theta - \\ + [\xi_3 (\cos \psi \cos \varphi - & \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y_3} + (\xi_3 \sin \varphi \cos \theta - & - \sin \psi \sin \varphi) \frac{\partial f_3}{\partial y_3} + \\ - \sin \psi \sin \varphi \sin \theta) + & - \zeta_3 \sin \theta) \frac{\partial f_3}{\partial z_3} & + \cos \varphi \sin \theta \left. \frac{\partial f_3}{\partial z_3} \right] \\ + \zeta_3 \sin \psi \sin \theta \left. \right] \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & & \\ \\ \left[-\xi_4 (\sin \psi \cos \varphi + \right. & \sin \psi [\xi_4 \sin \varphi \sin \theta + & [-\xi_4 (\cos \psi \sin \varphi + \\ + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) - & + \eta_4 \cos \varphi \sin \theta + \zeta_4 \cos \theta] \cdot & + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) - \\ - \eta_4 (-\sin \psi \sin \varphi + & \cdot \frac{\partial f_4}{\partial x_4} + \cos \psi [\xi_4 \sin \varphi \cos \theta - & - \eta_4 (\cos \psi \cos \varphi - \\ + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta) + & - \eta_4 \cos \varphi \sin \theta - \zeta_4 \cos \theta] \cdot & - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) \left. \right] \frac{\partial f_4}{\partial x_4} + \\ + \zeta_4 \cos \psi \sin \theta \left. \right] \frac{\partial f_4}{\partial x_4} + & \cdot \frac{\partial f_4}{\partial y_4} + (\xi_4 \sin \varphi \cos \theta + & + [\xi_4 (-\sin \psi \sin \varphi + \\ + [\xi_4 (\cos \psi \cos \varphi - & + \eta_4 \cos \varphi \cos \theta - \zeta_4 \sin \theta) \frac{\partial f_4}{\partial z_4} & + \cos \psi \cos \varphi \sin \theta) - \\ - \sin \psi \sin \varphi \sin \theta) - & & - \eta_4 (\sin \psi \cos \varphi + \\ - \eta_4 (\cos \psi \cos \varphi + & & + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) \left. \right] \frac{\partial f_4}{\partial y_4} + \\ + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) + & & + (\xi_4 \cos \varphi \sin \theta - \\ + \zeta_4 \sin \psi \sin \theta \left. \right] \frac{\partial f_4}{\partial y_4} & & - \eta_4 \sin \varphi \sin \theta) \frac{\partial f_4}{\partial z_4} \end{array}$$

4. I risultati di cui sopra come pure quelli spettanti alla distribuzione delle accelerazioni d'ordine qualunque dei punti del solido rigido considerato possono essere applicati all'analisi cinematica dei meccanismi spaziali, soprattutto nel caso in cui v'è l'interesse di prendere in istudio il moto dell'ele-

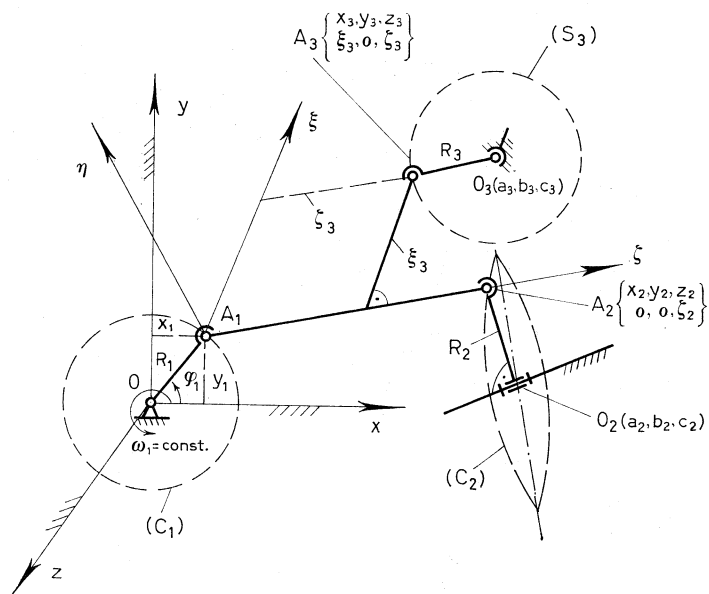


Fig. 4.

mento centrale. In questo quadro c'entrano i meccanismi schematizzati in figg. 4, 5 e 7. Figg. 6, 8 e 9 illustrano tali meccanismi costruiti dall'Altmann [13] all'uopo di far passare l'elemento centrale per certe posizioni dinanzi prescritte. Il meccanismo rappresentato in fig. 6 corrisponde a quello dato in

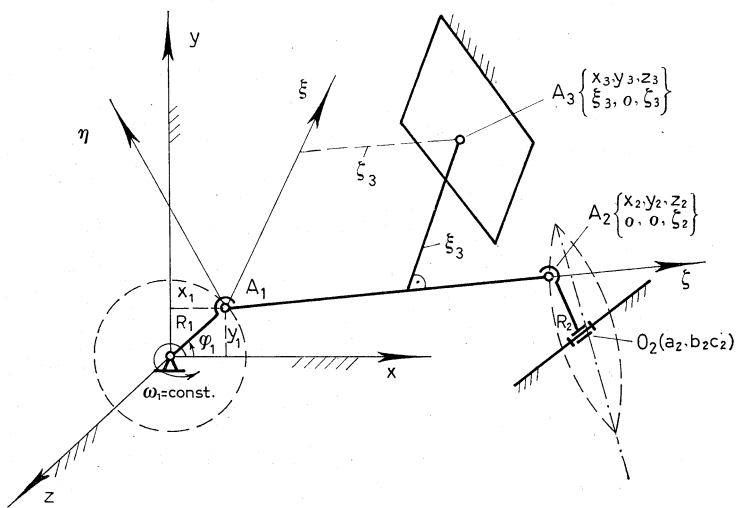


Fig. 5.

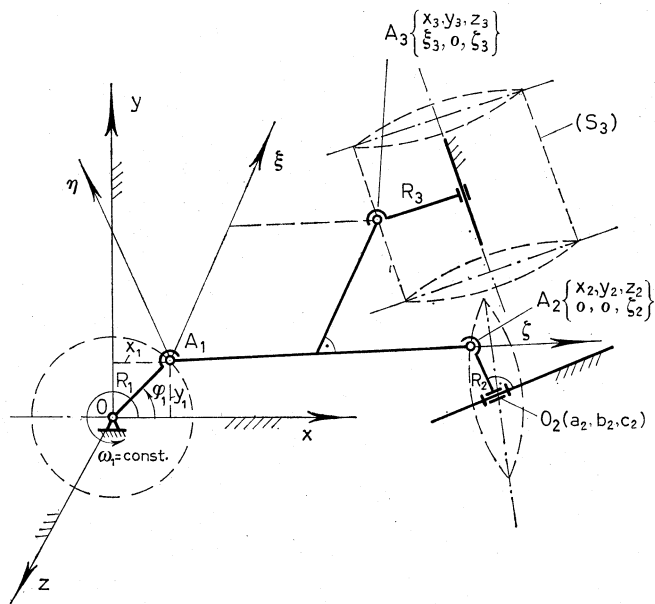


Fig. 6.

fig. 5, mentre i meccanismi dati in figg. 8 e 9 sono caratterizzati, nonostante la loro strutturale diversità, dal fatto che i loro elementi centrali eseguono il medesimo moto (due dei punti di questi elementi si muovono su due cerchi fissi ed il terzo su un cilindro fisso).

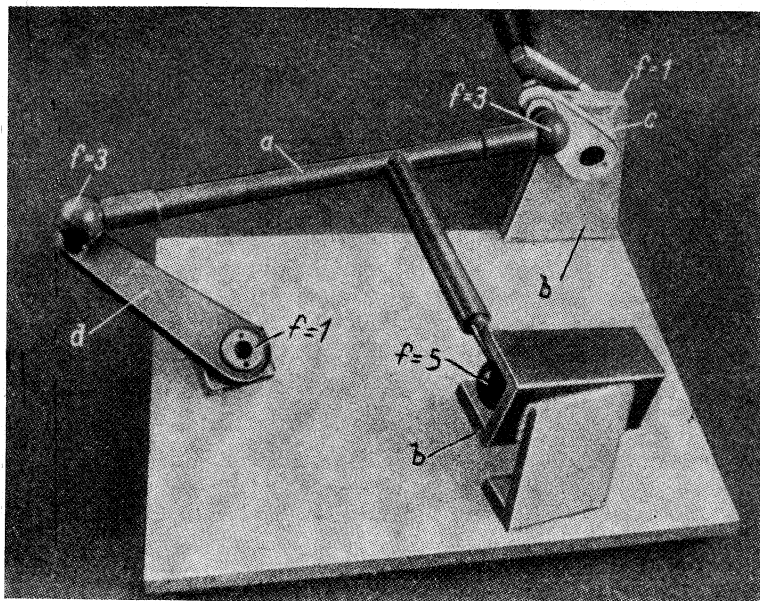


Fig. 7.

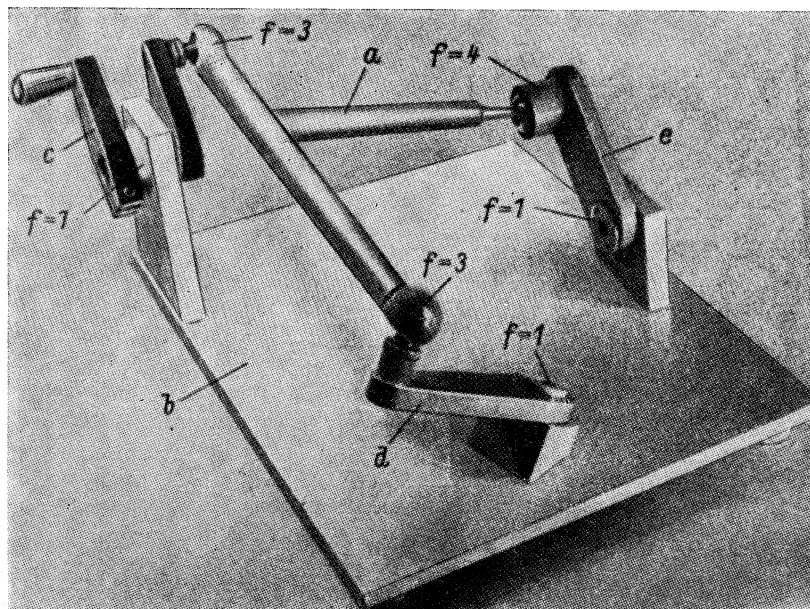


Fig. 8.

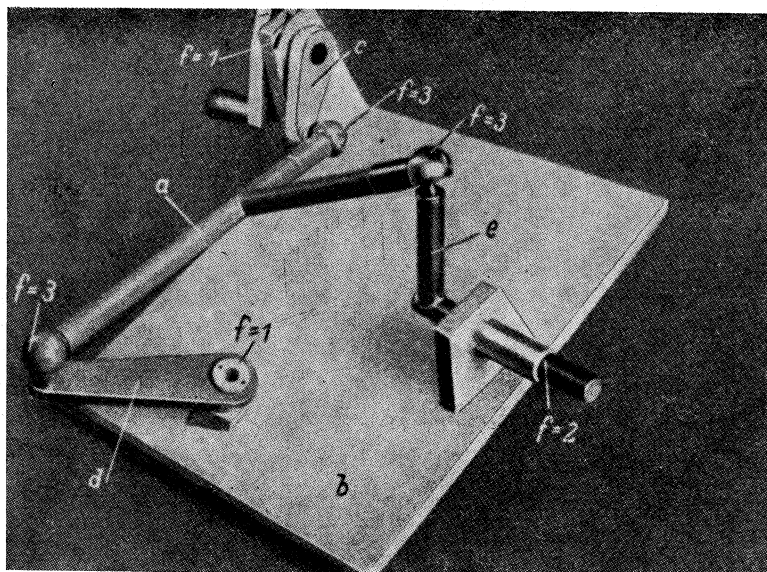


Fig. 9.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. MANGERON, *Sulla teoria generale delle accelerazioni ridotte d'ordine superiore*. « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8^a, 32, 505-508 (1961).
- [2] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Nuove equazioni di Meccanica analitica ed operatori differenziali d'ordine superiore*. « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8^a, 44, 375-380 (1968).
- [3] D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI e N. ORLANDEA, *An algorithm for producing circular and linear envelope curves in plane mechanisms consisting of complex kinematic chains with applications in digital control of machine tools*. Nota I. « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8^a, 47, 493-501 (1969).
- [4] D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI e collab., *Allgemeine Theorie der sukzessiven Näherungen beim Getriebe- und Maschinenstudium auf Grund der neuen Matrix-Tensor - Methode, im Hinblick auf die Anwendungen von Rechenautomaten*. « Romanian Journal of Applied Mechanics », 13, 981-996 (1968).
- [5] D. MANGERON, N. IRIMICIUC e C. DRAGAN, *Novye grafo-analiticheskie metody issledovania mehanizmov i masin*. « Mathematica, Cluj », 4 (27), 1, 159-200 (1962).
- [6] D. MANGERON, *Méthode tangentielle dans l'étude des mécanismes et des machines*. Comptes rendus de la Session scientifique jubilaire de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, Bucarest, juillet 1960.
- [7] TCHANG TSY-SIANG, *On Applications of the Matrix-Tensor Method in Mechanisms*. Doctoral Dissertation, Aviation Institute, Pekin 1967.
- [8] JOHN J. UICKER, JR., *Velocity and Acceleration Analysis of Spatial Mechanisms using 4x4 Matrices*. Northwestern University, Technological Institute. Evanston, Illinois, Sept. 1963.
- [9] P. A. LEBEDEV, *Analiticheskie metody issledovania prostranstvennyh mehanizmov*. GITTL, M.-L., 1967.
- [10] F. L. LITVIN, *Teoria zubčatyh peredač*. Gostehizdat, M., 2-a ed., 1969.
- [11] W. MEYER e CAPELLEN, *Neue Forschungen in der Getriebelehre*, « Rhein-Westf. Technische Anzeiger », 189-194 (1965).
- [12] B. FINZI, *Meccanica Razionale*. 2 volumi, N. Zanichelli, Bologna.
- [13] F. G. ALTMANN, *Ermittlung der geometrischen Abmessungen von räumlichen Koppelgetrieben für vorgeschriebene Bedingungen*, « Maschinenbautechnik », H. 12, 672-679 (1958).