Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Fabrizio

Problemi di unicità per le equazioni funzionali non lineari del campo elettromagnetico. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.5, p. 268–271.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_5_268_0>

Fisica matematica. — *Problemi di unicità per le equazioni funzionali non lineari del campo elettromagnetico* (*). Nota II (**) di MAURO FABRIZIO, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We establish a uniqueness theorem for the solution of an initial-boundary value problem for Maxwell's equations.

Valendoci della dualità dimostrata nella Nota I, stabiliremo ora un teorema di unicità per le equazioni non lineari del campo elettromagnetico, limitandoci al caso non ereditario.

Questa limitazione è dovuta soltanto ad una nostra maggiore conoscenza dei risultati relativi ai sistemi del tipo (I,24) (1) privi del termine ereditario.

Infatti il sistema (I,24), con $\overline{\mathrm{B}} \equiv 0$ è *simmetrico* e *iperbolico* in quanto A, Λ^i risultano per ogni i delle matrici simmetriche e A è definita positiva.

Ora poiché $\partial \mathrm{A}/\partial t$ non risulta limitata se non per valori di u_1 e u_2 assolutamente continui, i teoremi di esistenza [1] relativi al problema (I,24), (I,25) a noi noti non possono essere utilizzati direttamente in quanto pretendono una maggiore regolarità sui coefficienti.

È possibile però superare queste difficoltà approssimando A con una successione $\{\mathrm{A}_n\}$ sufficientemente regolare.

A questo scopo indichiamo con $r^2 = x^2 + t^2$ e

$$\omega_n(x\,,t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-n^2r^2}} & \text{per} \quad r^2 < \dfrac{1}{n^2} \\ 0 & \text{per} \quad r^2 \geq \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

Quindi costruiamo le funzioni $u_1^n\,, u_2^n$ nel seguente modo:

$$u_1^n = \bar{u}_1 * \omega_n \tag{II,1}$$

$$u_2^n = \bar{u}_2 * \omega_n \tag{II,2}$$

dove col simbolo $*$ intendiamo rappresentare il prodotto di *convoluzione* in $\mathrm{R}^3 \times (-\infty\,,\infty)$ e inoltre $\bar{u}_1(x\,,t)\,,\bar{u}_2(x\,,t)$ sono funzioni definite su tutto $\mathrm{R}^3 \times (-\infty\,,\infty)$:

$$\bar{u}_{1,2} = \begin{cases} u_{1,2} & \text{per} \quad (x\,,t) \in \Omega \times (-\infty\,,\mathrm{T}) \\ 0 & \text{per} \quad (x\,,t) \in \mathrm{R}^3 \times (-\infty\,,\infty) - \Omega \times (-\infty\,,\mathrm{T}]\,. \end{cases}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei gruppi di ricerca per la matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1970.

(1) La numerazione delle formule indicate (I,·) è relativa alla Nota I.

È noto [2] che u_1^n, u_2^n rappresentano due successioni di funzioni infinitamente differenziabili e convergenti in media a u_1, u_2 su ogni insieme limitato di Q.

Possiamo così definire per ogni n il tensore A_n nel modo seguente:

$$\text{(II,3)} \qquad A_n(x\,,t) = \int_0^1 \nabla_n F(x\,, \tau u_1^n + (1-\tau)\, u_2^n)\, d\tau$$

come A anche A_n risulta simmetrico e definito positivo. Inoltre, in virtù della regolarità di u_1^n, u_2^n e per le ipotesi su F, gli A_n sono limitati con derivate prime e seconde limitate.

Infine per la limitatezza di $\frac{\partial^2 F_i}{\partial u_j \partial u_l}$ è possibile dimostrare con un ragionamento simile a quello seguito per pervenire alla equazione (I,21):

$$\text{(II,4)} \qquad |(A_n - A)_{ij}| \leq \text{cost}\,(|u_1^n - u_1| + |u_2^n - u_2|)$$

dove con $(A_n - A)_{ij}$ intendiamo le componenti del tensore $(A_n - A)$.

Da (II,4) risulta quindi che per $n \to \infty$, $A_n \to A$ in media su ogni insieme limitato di Q.

Costruiamo quindi per ogni n la funzione $\varphi_n = [\boldsymbol{\Phi}_n\,, \boldsymbol{\Psi}_n]$ che soddisfa il sistema simmetrico e iperbolico (in quanto A_n risulta per tutti gli n definito positivo (2))

$$\text{(II,5)} \qquad A_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \Lambda^i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} + f$$

e verifica le condizioni

$$\text{(II,6)} \qquad \varphi_n(x\,, T) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\text{(II,7)} \qquad \boldsymbol{\Phi}_n \times \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times I.$$

In queste ipotesi teoremi di esistenza [1] assicurano che il problema espresso dalle equazioni (II,5), (II,7) ammette una soluzione $\varphi_n = [\boldsymbol{\Phi}_n\,, \boldsymbol{\Psi}_n]$ tale che $\boldsymbol{\Phi}_n \in S$ e $\boldsymbol{\Psi}_n \in R$. Inoltre per la condizione di iperbolicità e poiché $f(x\,,t)$ è a supporto limitato, teoremi sul dominio di dipendenza [3] ci permettono di affermare che la soluzione φ_n è anch'essa a supporto limitato.

Dalla relazione (I,23) con $B \equiv 0$, $\varphi = \varphi_n$ e dall'equazione (II,5) si ha:

$$\text{(II,8)} \qquad \int_Q (u_1 - u_2\,, f)\, dx\, dt = \int_Q \left(u_1 - u_2\,, (A_n - A)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\right) dx\, dt.$$

Con un procedimento simile a quello seguito da A. E. Hurd [5] si dimostra (Vedi Appendice) che $\partial \Phi_n / \partial t$ risulta limitata uniformemente rispetto a n se:

$$\text{(II,9)} \qquad \left(\frac{\partial A_n}{\partial t}\xi\,, \xi\right) \leq K(t)(A_n \xi\,, \xi) \quad \text{in } Q$$

dove ξ è un vettore arbitrario a sei dimensioni e $K(t)$ una funzione non negativa integrabile in $(0\,, T)$.

(2) Si è adottata la definizione di sistemi iperbolici data da K. O. Friedrichs [4].

Pertanto in queste ipotesi e poiché A_n converge in media ad A su ogni insieme limitato di Q, si ha che il secondo membro di (II,8) si può rendere arbitrariamente piccolo da cui segue (I,17).

Un caso in cui si verifica (II,9) si ha quando

$$\text{(II,10)} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{F}_i}{\partial u_j \partial u_l} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j \leq 0$$

e le soluzioni u soddisfano la limitazione

$$\text{(II,11)} \qquad \frac{u_l(x, t_1) - u_l(x, t_2)}{(t_1 - t_2)} \leq \overline{K}(t)$$

dove $\overline{K}(t)$ è anch'essa una funzione integrabile in $(0, T)$.

Infatti se u_1 e u_2 soddisfano la condizione (II,11) risulta per n abbastanza grande (vedi [2]):

$$\frac{(\partial u_1^n)_l}{\partial t} \leq \overline{K}(t) \quad , \quad \frac{(\partial u_2^n)_l}{\partial t} \leq \overline{K}(t).$$

Quindi

$$\frac{\partial (A_n)_{ij}}{\partial t} = \int_0^1 \sum_{1}^{6}{}_k \frac{\partial^2 \tilde{F}_i}{\partial u_j \partial u_k}(x, \tau u_1^n + (1-\tau) u_2^n) \left[\tau \frac{\partial (u_1^n)_l}{\partial t} + (1-\tau) \frac{\partial (u_2^n)_l}{\partial t}\right] d\tau$$

la condizione (II,9) è così verificata se vale (II,10).

Appendice

Poniamo $\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = g_n$ e consideriamo l'equazione che si ottiene da (II,5) derivando rispetto al tempo primo e secondo membro:

$$\text{(A,1)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(A_n g_n) = \Lambda^i \frac{\partial g_n}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

per il teorema di esistenza già citato [1] $g_n \in S \times R$. Operiamo quindi su (A,1) la trasformazione $t \to T - t$, si ha pertanto:

$$\text{(A,2)} \qquad -\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}_n \tilde{g}_n) = \Lambda^i \frac{\partial \tilde{g}_n}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}$$

dove $\tilde{g}_n(x, t) = g_n(x, T-t)$, $\tilde{A}_n(x, t) = A_n(x, T-t)$, $\tilde{f}(x, t) = f(x, T-t)$.

Ora dalla identità:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}_n \tilde{g}_n, \tilde{g}_n) = 2\left(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{A}_n \tilde{g}_n), \tilde{g}_n\right) - \left(\frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial t}\tilde{g}_n, \tilde{g}_n\right)$$

integrando su Ω e sull'intervallo $(0, \tau)$ con $\tau \leq T$, otteniamo ricordando (A,2)

$$\text{(A,3)} \qquad \int_\Omega \left(\tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{\varphi}_n}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{\varphi}_n}{\partial t}\right)\Big|_{t=\tau} dx = -2\int_0^\tau \int_\Omega \left(\Lambda^i \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{g}_n, \tilde{g}_n\right) dx\, dt + $$

$$+ 2\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}, \tilde{g}_n\right) dx\, dt - \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial t}\tilde{g}_n, \tilde{g}_n\right) dx\, dt$$

osserviamo che, se ricordiamo l'espressione dei Λ^i, per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_\Omega \left(\Lambda^i \frac{\partial}{\partial x_i} g_n , g_n\right) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_n}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_n}{\partial t} \times \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

ma poiché $\boldsymbol{\Psi}_n \times \boldsymbol{n} = 0$ in $\partial\Omega \times \mathrm{I}$ risulta che anche $\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_n}{\partial t} \times \boldsymbol{n} = 0$ in $\partial\Omega \times \mathrm{I}$, quindi il primo termine a secondo membro di (A,3) è identicamente uguale a zero. Ora se vale la condizione (II,9) segue che

$$-\left(\frac{\partial \tilde{\mathrm{A}}_n}{\partial t} g_n , g_n\right) \leq \mathrm{K}\,(\mathrm{T} - t)\,(\tilde{\mathrm{A}} g_n , g_n)$$

pertanto da (A,3) ricordando anche la diseguaglianza di Schwarz:

$$\int_\Omega (\tilde{\mathrm{A}}_n g_n , g_n) \, \mathrm{d}x \leq \int_0^{\mathrm{T}} \int_\Omega \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} , \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^{\tau} \int_\Omega \left(\frac{1}{c} + \mathrm{K}\,(\mathrm{T} - t)\right) (\tilde{\mathrm{A}}_n g_n , g_n) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

da cui per il lemma di Gronwall [6]:

$$\int_{\mathrm{Q}} (\tilde{\mathrm{A}}_n g_n , g_n) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq \text{cost}$$

dove la costante è indipendente da n. Infine poiché $\tilde{\mathrm{A}}_n$ risulta definita positiva si ha:

$$\int_{\mathrm{Q}} (g_n , g_n) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq \text{cost}$$

quindi $\partial\varphi_n/\partial t$ risulta limitata uniformemente rispetto a n.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. S. PHILLIPS, *Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *90*, 193 (1959).

[2] S. L. SOBOLEV, *Application of functional analysis in math. phys.*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1963.

[3] C. WILCOW, *The domain of dependence, Inequality for symmetric hyperbolic systems*, «Bull. Amer. Math. Soc.», *70*, 149 (1964).

[4] K. O. FRIEDRICHS, *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, «Comm. Pure Appl. Math.», *7*, 345 (1954).

[5] A. E. HURD, *A uniqueness theorems for weak solutions of symmetric quasilinear hyperbolic systems*, «Pacif. Journ. of Math.», *29*, 555 (1969).

[6] G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, C.N.R. Cremonese, Roma 1956.