
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIUSEPPE GRIOLI

Microstrutture. Nota I.

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 49 (1970), n.5, p. 261–267.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_5_261_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Microstrutture* (*). Nota (**) I del Corrisp.
GIUSEPPE GRIOLI.

SUMMARY. — Previously microstructures have been characterized by a rather abstract point of view, whose free energy, which satisfies the principle of material indifference, depends in a very general way on a not exactly established number of variables.

We point out that also in the case of large deformations it is possible to conceive physical models of microstructures which admit a free energy of the type previously considered.

For this purpose, in this first lecture the necessary premises of a kinematic and geometrical type are established.

Avanzati sviluppi della Meccanica dei Continui sono oggi rivolti verso la teoria delle *microstrutture*, cioè di quei sistemi materiali che pur tradotti in uno schema continuo vogliono ricordare in qualche modo una loro provenienza particellare.

Nella formulazione dello schema matematico non va dimenticato che a ogni punto del sistema materiale va associata una *molecola* estesa rigida [*continui di Cosserat*] o deformabile [*microstrutture*].

Ho studiato precedentemente [1] il problema di vedere se e in quale misura la conoscenza della struttura analitica dell'*energia libera* sia sufficiente per caratterizzare il comportamento meccanico [cioè, lo stato di reazioni interne] di una microstruttura (1).

Naturalmente, il legame tra lavoro delle forze interne e variazione di *energia libera* era ivi quello corrispondente ai sistemi a trasformazioni reversibili e dava luogo a equazioni costitutive valide in uno stato di equilibrio o, nel caso dinamico, per sole trasformazioni reversibili.

In [1] si suppone che l'*energia libera* dipenda in modo molto generale da un qualunque numero di variabili geometriche la cui natura non è in generale precisata, salvo la imposizione di soddisfare al *principio di indifferenza materiale*, e la teoria sviluppata presenta pertanto, un carattere alquanto astratto. Si tratterà ora di mostrare — anche per deformazioni finite — come sia possibile concepire modelli fisici di *microstrutture* che ammettono un'*energia libera* proprio del tipo di quella postulata in [1].

Scopo ulteriore di questo studio è di ampliare la teoria precedente [1] tenendo conto di azioni dissipative eventualmente presenti nel caso dinamico, in accordo con recenti proposte di Truesdell [2] e di Ziegler [3] per i continui classici e con la stessa teoria di Onsager [4] del caso lineare classico. Presumibilmente, i fenomeni plastici possono inquadrarsi nello schema avanti proposto.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca Matematici del C.N.R.

(**) Presentata nella seduta del 14 novembre 1970.

(1) Per una più dettagliata bibliografia vedi [1].

1. PREMESSE GEOMETRICHE. - Sia C' la configurazione attuale di un sistema materiale S costituito da un grandissimo numero di particelle, « molecole », di dimensioni piccolissime ma individuabili e della cui estensione e struttura si vuole che rimanga qualche traccia nella descrizione delle proprietà meccaniche del sistema sullo schema del continuo.

Si supponga che la generica « molecola » sia costituita da n particelle di masse m'_i . Denoterò con c' , P' e Q'_i le posizioni attuali della molecola considerata c , del suo baricentro e della particella di massa m'_i e con m' la sua massa totale. Sia inoltre, C una configurazione di riferimento per S e c , P , Q_i i corrispondenti di c' , P' , Q'_i in C .

Data la piccolezza della generica molecola, supporrò che la sua deformazione sia di tipo omogeneo. Ciò significa che tra i vettori PQ_i , $P'Q'_i$ esiste una corrispondenza caratterizzata da una matrice γ dipendente da P , C , C' : $\gamma = \gamma(P; C, C')$, caratterizzata dall'uguaglianza

$$(1) \quad P'Q'_i = \gamma PQ_i \rightarrow x_j^{(i)} - x_j = \gamma_{ji}(y_l^{(i)} - y_l),$$

ove con x_j , $x_j^{(i)}$, y_l , $y_l^{(i)}$ si denotano le coordinate di P' , Q'_i , P , Q_i , rispetto a un prefissato riferimento trirettangolo levogiro ⁽²⁾.

Si consideri uno spostamento infinitesimo (cioè, per il quale sia sufficiente la valutazione degli elementi del primo ordine delle quantità che intervengono) che porti da C' a $C'' = C' + \delta C'$. Sia $\lambda = \gamma(P; C', C'')$ la matrice che caratterizza tale spostamento e $\delta\gamma$ la corrispondente variazione di $\gamma(P; C, C')$. Sarà

$$(2) \quad \gamma + \delta\gamma = \lambda\gamma \rightarrow \delta\gamma = (\lambda - I)\gamma.$$

Pertanto, posto

$$(3) \quad \delta'\Psi = \lambda - I,$$

si ha

$$(4) \quad \delta\gamma = \delta'\Psi\gamma.$$

In corrispondenza allo spostamento da C' a $C'' = C' + \delta C'$, da (1), (3) segue

$$(5) \quad \delta Q'_i = \delta P' + \delta\gamma PQ_i = \delta P' + \delta'\Psi P'Q'_i.$$

(2) Si consideri la (1) per un s diverso da i :

$$(*) \quad P'Q'_s = \gamma PQ_s.$$

Da (1), (*) segue

$$(**) \quad Q'_sQ'_i = \gamma Q_sQ_i.$$

La (**) mostra che la deformazione è omogenea [con la medesima matrice] anche rispetto a ogni prefissata particella Q_s .

Se sul generico elemento ⁽³⁾ Q_i agisce la forza esterna $\mathbf{F}_{(i)}$ il corrispondente lavoro è espresso da

$$(6) \quad \delta l^{(e)} = F_s \delta u_s + \delta \gamma_{rs} M_{rs} = F'_s \delta u_s + \delta' \Psi'_{rs} M'_{rs},$$

ove δu_s esprime la componente di indice s di $\delta P'$, $F'_s = \sum_{i=1}^n F'_{s(i)}$ e le M_{rs} , M'_{rs} sono le coordinate astatiche ⁽⁴⁾ della sollecitazione $\mathbf{F}_{(i)}$, pensata agente sui Q_i e sui Q'_i rispettivamente:

$$(7) \quad M_{rs} = \sum_{i=1}^n (y_s^{(i)} - y_s) F'_{r(i)} \quad , \quad M'_{rs} = \sum_{i=1}^n (x_s^{(i)} - x_s) F'_{r(i)}.$$

Se con $\bar{\gamma}$ si denota la matrice coniugata della γ , evidentemente risulta $M' = M\bar{\gamma}$.

Si ponga ⁽⁵⁾

$$(8) \quad M_p = \varepsilon_{prl} M_{lr} \quad , \quad M'_p = \varepsilon_{prl} M'_{lr}.$$

Denotando con $M_{(rs)}$, $M_{[rs]}$ la parte simmetrica e quella antisimmetrica della matrice M (e analogamente per la M'), da (8) segue

$$(9) \quad M_{[rl]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{rlr} M_p \quad , \quad M'_{[rl]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{rlr} M'_p.$$

Posto, inoltre

$$(10) \quad \delta' \omega_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{rls} \delta' \Psi'_{rs}$$

si ha pure

$$(11) \quad \delta' \Psi'_{[rs]} = \varepsilon_{rls} \delta' \omega_l \quad , \quad \delta' \Psi'_{rs} = \delta' \Psi'_{(rs)} + \varepsilon_{rls} \delta' \omega_l.$$

Si riconosce che M'_p esprime il momento risultante rispetto a P' delle forze esterne agenti sulla molecola c' , mentre $\delta' \omega_l$, in base a (3), (10), può interpretarsi quale rotazione di insieme di c' subordinata allo spostamento infinitesimo $\delta C'$. All'espressione (6) del lavoro delle forze esterne si può dare pertanto l'aspetto espressivo

$$(12) \quad \delta l^{(e)} = F'_s \delta u_s + \delta \gamma_{rs} M_{rs} = F'_s \delta u_s + \delta' \Psi'_{(rs)} M'_{(rs)} + M'_r \delta' \omega_r.$$

Vale la pena di osservare che se lo spostamento da C' a C'' è uno spostamento rigido infinitesimo di rotazione di vettore $\delta' \omega_r$, da (2), (3), (4) segue per le componenti delle varie matrici

$$(13) \quad \lambda_{rs} = \varepsilon_{rls} \delta' \omega_l + \delta_{rs} \quad , \quad \delta \gamma_{rs} = \varepsilon_{rlq} \delta \omega_l \gamma_{qs} \quad , \quad \delta' \Psi'_{rs} = \varepsilon_{rls} \delta' \omega_l,$$

ove δ_{rs} denota il simbolo di Kronecker.

(3) Nel seguito con c' , Q'_i mi riferirò anche alla generica molecola e alla generica particella in C' , oltre che alle loro posizioni. Analogamente per c e Q_i .

(4) Rispetto alla terna di riferimento riportata in P o P' .

(5) Con ε_{rst} si denota evidentemente l'indicatore di Ricci.

2. ELEMENTI DI CINEMATICA DELLE MASSE. - Nel moto del sistema rispetto al prefissato riferimento siano $\mathbf{v}^{(i)}$ e $\mathbf{v}$ le velocità di Q_i e P' . Da (1) segue

$$(14) \quad \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v} + \dot{\gamma} \mathbf{PQ}_i.$$

Si deduce che le espressioni della quantità di moto, $\mathbf{q}$, del momento delle quantità di moto rispetto a P' , $\mathbf{k}_{p'}$, e della forza viva, T , per la generica molecola c' sono rispettivamente

$$(15) \quad \mathbf{q} = m' \mathbf{v},$$

$$(16) \quad \mathbf{k}_{p'} = \sum_{i=1}^n m'_i \mathbf{P}' Q'_i \times \mathbf{v}^{(i)} = \sum_{i=1}^n m'_i \gamma \mathbf{PQ}_i \times \dot{\gamma} \mathbf{PQ}_i = \varepsilon_{rln} \gamma_{ls} \dot{\gamma}_{np} A_{sp} \mathbf{c}_r,$$

e

$$(17) \quad T = \frac{1}{2} [m' \dot{u}^2 + A_{ln} \dot{\gamma}_{rl} \dot{\gamma}_{rn}].$$

Nelle (15), (16), (17) [con m' massa di c'], $\mathbf{c}_r$ è il versore dell'asse di indice r , mentre A_{rs} rappresenta il generico elemento della matrice strutturale d'inerzia (indipendente dal tempo):

$$(18) \quad A_{rs} = \sum_{i=1}^n m'_i (y_r^{(i)} - y_r) (y_s^{(i)} - y_s).$$

Vale la pena di osservare che se il moto di c' è rigido (Cosserat) e ω è la sua velocità angolare, dalle (16), (17), tenuto conto che γ è ora una matrice di rotazione, segue

$$(19) \quad \mathbf{k}_{p'} = \sigma_{rs} \omega_s \mathbf{c}_r, \quad T = \frac{1}{2} [\sigma_{rs} \omega_r \omega_s + m' \dot{u}^2],$$

con

$$(20) \quad \omega_r = \frac{1}{2} \varepsilon_{pr\sigma} \gamma_{\sigma q} \dot{\gamma}_{pq}.$$

Dette A'_{rs} le espressioni che si deducono dalle A_{rs} , (18), mediante la sostituzione delle x_r alle y_r , nelle (19) si deve intendere

$$(21) \quad \sigma_{rs} = I \delta_{rs} - A'_{rs} = \varepsilon_{rln} \varepsilon_{sqn} \gamma_{lt} \gamma_{tq} A_{tq}$$

ove I esprime il valore comune agli invarianti lineari delle matrici A e A' .

3. SULLA DEFORMAZIONE DEL SISTEMA. - Il continuo classico è in definitiva un particolare schema matematico dell'insieme dei baricentri P' delle particelle che, alla fine, ignora del tutto la loro estensione. Ciò dà luogo a ben note espressioni delle caratteristiche dello strain. Volendo tenere conto nella definizione di queste ultime dell'esistenza delle particelle Q' presenti nelle molecole c' , non si può, tuttavia, prescindere dalla valutazione delle variazioni

di distanza tra le Q' e nella traduzione in uno schema continuo della microstruttura considerata si dovrà prendere in esame [temporaneamente] il sistema [continuo] derivante dall'insieme delle particelle Q' . In tal modo alla distanza tra due particelle Q' [della medesima molecola o di due molecole distinte] può associarsi un ds esprimente la distanza tra due punti di un continuo nello stato attuale. Si viene così a costruire una varietà euclidea a sei dimensioni la cui metrica individuerà la deformazione del sistema.

Sia dQ' un vettore infinitesimo dello schema continuo corrispondente, nell'originario schema particellare, al vettore che va dalla particella Q' a una ad essa vicinissima [della medesima o di una diversa molecola].

Denotando ⁽⁶⁾ con a la matrice delle $x_{r,s}$ e posto $\eta = PQ$, da (1) segue

$$(22) \quad dQ' = adP + \gamma d\eta + d\gamma\eta.$$

Analogamente, per un secondo vettore $\partial Q'$ pure spiccato da Q' si avrà

$$(23) \quad \partial Q' = a\partial P + \gamma\partial\eta + \partial\gamma\eta.$$

Nelle (22), (23) è, evidentemente, da intendersi

$$(24) \quad d\gamma = \gamma_{,t} d\eta_t, \quad \partial\gamma = \gamma_{,t} \partial\eta_t.$$

Denotando con il soprassegno la matrice coniugata di una data matrice, da (22), (23) segue, per il prodotto interno,

$$(25) \quad \begin{aligned} dQ' \cdot \partial Q' = & \bar{a}a dP \cdot \partial P + \bar{a}\gamma d\eta \cdot \partial P + \bar{\gamma}a dP \cdot \partial\eta + \bar{a}d\gamma\eta \cdot \partial P + \\ & + \bar{\partial\gamma}a dP \cdot \eta + \bar{\gamma}\gamma d\eta \cdot \partial\eta + \bar{\partial\gamma}\gamma d\eta \cdot \eta + \bar{\gamma}d\gamma\eta \cdot \partial\eta + \bar{\partial\gamma}d\gamma\eta \cdot \eta. \end{aligned}$$

mentre, risultando nello stato di riferimento

$$(26) \quad a \equiv \bar{a} \equiv I, \quad \gamma \equiv \bar{\gamma} \equiv I, \quad d\gamma \equiv d\bar{\gamma} \equiv 0 \quad (\text{in } C)$$

si ha pure

$$(27) \quad dQ \cdot \partial Q = dP \cdot \partial P + d\eta \cdot \partial P + \partial\eta \cdot dP + d\eta \cdot \partial\eta.$$

Da (25), (27), identificando dQ' con $\partial Q'$, si deducono le espressioni delle dilatazioni lineari, tenendoli invece distinti si ottengono le variazioni angolari e superficiali, considerando un terzo vettore si deducono le variazioni di volume [mediante il prodotto misto].

La deformazione del continuo è, pertanto, caratterizzata dalla conoscenza delle matrici $\bar{a}a, \bar{a}\gamma, \dots, \bar{\partial\gamma}d\gamma$.

Posto

$$(28) \quad \begin{cases} b = \bar{a}a & , & v = \bar{a}\gamma & , & v^{(t)} = \bar{a}\gamma_{,t} \\ \sigma = \bar{\gamma}\gamma & , & \sigma^{(t)} = \bar{\gamma}\gamma_{,t} & , & \sigma^{(pq)} = \bar{\gamma}_{,p}\gamma_{,q} \end{cases}$$

(6) Nel seguito denoterò con la virgola la derivazione rispetto alle y_s .

e tenuto conto di (25), (26), si ha

$$(29) \quad L = dQ' \cdot \partial Q' - dQ \cdot \partial Q = (b - 1) dP \cdot \partial P + (\bar{v} - 1) d\eta \cdot \partial P + \\ + (\bar{v} - 1) dP \cdot \partial \eta + (\sigma - 1) d\eta \cdot \partial \eta + v^{(t)} \eta \cdot \partial P dy_t + \bar{v}^{(t)} dP \cdot \eta \partial y_t + \\ + \sigma^{(t)} \eta \cdot \partial \eta dy_t + \bar{\sigma}^{(t)} d\eta \cdot \eta \partial y_t + \sigma^{(pq)} \eta \cdot \eta \partial y_p dy_q.$$

È opportuno mettere in evidenza che le matrici σ , $\sigma^{(t)}$, $\sigma^{(pq)}$ si esprimono in definitiva mediante le prime tre matrici (28). Infatti, tenuto conto dell'invertibilità della a (il cui determinante D è positivo), da (28) segue

$$(30) \quad \gamma = (\bar{a})^{-1} v, \quad \gamma_{,t} = (\bar{a})^{-1} v^{(t)}$$

e, pertanto,

$$(31) \quad \begin{cases} \sigma = \bar{v} a^{-1} (\bar{a})^{-1} v = \bar{v} b^{-1} v, \\ \sigma^{(t)} = \bar{v} a^{-1} (\bar{a})^{-1} v^{(t)} = \bar{v} b^{-1} v^{(t)}, \\ \sigma^{(pq)} = \bar{v}^{(p)} a^{-1} (\bar{a})^{-1} v^{(q)} = \bar{v}^{(p)} b^{-1} v^{(q)}. \end{cases}$$

Se lo spostamento da C a C' è rigido, risulta, a meno di un'inessenziale traslazione,

$$(32) \quad a = \mathbb{R} = \gamma, \quad d\gamma = \gamma_{,t} dy_t = 0,$$

ove $\mathbb{R}$ è una matrice di rotazione indipendente da P . In tal caso da (28), (31) si deduce

$$(33) \quad b = 1, \quad v = \bar{v} = 1, \quad \sigma = 1, \\ v^{(t)} = \sigma^{(t)} = \sigma^{(pq)} = \bar{v}^{(t)} = \bar{\sigma}^{(t)} = \bar{\sigma}^{(pq)} = 0.$$

Da (29) segue allora $L = 0$ e si riconosce che il prodotto interno $dQ \cdot \partial Q$ si mantiene inalterato qualunque siano i vettori dQ , ∂Q . Vale il viceversa. Ciò giustifica l'interpretazione delle $b - 1$, $v - 1$, $\sigma - 1$, $v^{(t)}$, $\sigma^{(t)}$, $\sigma^{(pq)}$, quali caratteristiche generalizzate di deformazione. Anzi, la deformazione del continuo è completamente caratterizzata non appena siano note le matrici $b - 1$, $v - 1$, $v^{(t)}$ [in base a (31)] il cui annullarsi è necessario e sufficiente affinché lo spostamento da C a C' sia rigido. Queste sono, pertanto, le effettive caratteristiche dello strain e viene spontaneo, per tale motivo, ritenere che l'*energia libera* del sistema, la cui variazione deve risultare nulla in corrispondenza a ogni spostamento rigido isoterma del continuo, in definitiva sia da ritenersi funzione delle b , v , $v^{(t)}$, oltre, s'intende, che delle temperature assolute degli stati C , C' .

Da (25), in base a (28), si deduce che la trasformazione del continuo induce una metrica di uno spazio a sei dimensioni ⁽⁷⁾, espressa da

$$(34) \quad ds^2 = [b_{rs} + 2 v_{rq}^{(s)} \eta_q + (\sigma^{(rs)})_{pq} \eta_p \eta_q] dy_r dy_s + \sigma_{rs} d\eta_r d\eta_s + \\ + 2 [v_{rs} + \sigma_{sp}^{(r)} \eta_p] dy_r d\eta_s.$$

(7) Di coordinate y_r , η_s .

Si interpreti, per un momento, la (34) come la forma caratteristica della deformazione di un continuo a sei dimensioni di tipo classico. Tale continuo è in realtà un sottile iperstrato, data la piccolezza delle η_s di fronte alle y_r . La deformazione del continuo, vista in sei dimensioni, è ben più complessa di quella precedentemente considerata e le sue caratteristiche sono i coefficienti della forma quadratica (34).

Comunque, la varietà di cui la (34) dà la metrica è euclidea e l'annullarsi del corrispondente tensore di Riemann fornisce le condizioni di integrabilità per le b_{rs} , v_{rs} , $v_{rs}^{(t)}$.

Vale la pena di osservare che nel caso dei continui di Cosserat risulta, in base a (28), $\sigma = 1$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GRIOLI G., *Energia libera e stato tensionale dei Continui*, « Annali di Matematica pura e applicata », S. IV., T. LXXXVII (1970).
- [2] TRUESDELL C., *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer-Verlag Berlin. Heidelberg. New York (1966).
- [3] ZIEGLER H., « Angew. Math. Phys. », 9b, 748 (1958); « Ing. Arch. », 30, 410 (1961).
- [4] ONSAGER L., « Phys. Rev. », 37 (2), 405 (1931); 38 (2), 2265 (1931).