Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Serge Vasilach

Sur les ensembles bornés dans les modules topologiques

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.5, p. 258–260.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_5_258_0>

Topologia. — *Sur les ensembles bornés dans les modules topologiques.* Nota di SERGE VASILACH, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si estende un noto risultato relativo ai sottoinsiemi limitati degli spazi vettoriali sul campo reale ai sottoinsiemi limitati nei moduli topologici su di un qualsiasi anello topologico.

1. – On sait (cfr. [1], Chap. III, § 2, No. 1) qu'un ensemble borné B dans un espace vectoriel topologique E sur le corps des nombres réels **R**, est un ensemble qui est absorbé par tout voisinage de l'origine O dans E. Une définition équivalente est donnée par la Proposition suivante (cfr. [1], Chap. III, § 2, Prop. 4).

PROPOSITION 1. – *Une partie* B *d'un espace vectoriel topologique* E *sur* **R** *est bornée, si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de points de* B *et toute suite* $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de scalaires de* **R** *telle que* $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$, *on a* $\lim\limits_{n \to \infty} (\lambda_n x_n) = 0$.

Dans le cas d'un espace vectoriel topologique E sur un corps quelconque non discret **K**, on dit qu'une partie B de E est bornée (cfr. [1], Chap. III, § 2, Exercise 1), si pour tout voisinage V de O dans E, il existe $\lambda \neq 0$ dans **K** tel que $\lambda B \subset V$. On montre (cfr. [1], loc. cit.) que si B est borné dans E, alors pour tout voisinage V de O dans E, il existe un voisinage W de O dans **K**, tel que $W \cdot B \subset V$. Dans ce cas, toutes les Propositions et Propriétés des ensembles bornés dans les espaces vectoriels topologiques sur **R**, s'étendent aux ensembles bornés dans un espace vectoriel topologique sur un corps non discret **K**, sauf la Proposition 1; celle–ci reste valable si et seulement si **K** est métrisable.

Il est naturel d'étendre la notion d'ensemble borné B dans un module topologique E sur un anneau topologique A, comme il suit (cfr. [2], Déf. 1):

DÉFINITION 1. – *Soient* A, *un anneau topologique*, E *un module topologique à gauche* (resp. à droite) *sur* A.

On dit qu'une partie B *de* E *est bornée dans* E *si pour tout voisinage* V_E *de* O *dans* E, *il existe un voisinage* V_A *de* O *dans* A *tel que* $V_A \cdot B \subset V_E$ (resp. $BV_A \subset V_E$).

Dans ces conditions, toutes les propriétés des ensembles bornés dans les espaces vectoriels topologiques s'étendent aux ensembles bornés dans les modules topologiques, y compris la Proposition 1, dans le cas où l'anneau A est métrisable.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1970.

Dans le présent travail on donne une extension de la Prop. 1 au cas des ensembles bornés dans un module topologique sur un anneau topologique A quelconque. Cette extension est donnée par le

THÉORÈME. 1. – *Soient* A *un anneau topologique à élément unité noté* 1; $\mathfrak{B}_A$ *le filtre de voisinage de* O *dans* A; E *un* A*–module topologique à gauche* (resp. à droite); $\mathfrak{B}_E$ *le filtre des voisinages de* O *dans* E. *Soit, d'autre part,* I *un ensemble ordonné filtrant à droite, pour une relation d'ordre notée* $(\leq)$ *tel que* Card I $=$ Card $\mathfrak{B}_A$ *et* φ *une bijection de* I *sur* $\mathfrak{B}_A$, *telle que* $(\iota \leq \varkappa) \Longleftrightarrow \varphi(\iota) \supset \varphi(\varkappa)$.

Dans ces conditions, une partie B *de* E *est bornée dans* E *si et seulement si pour toute famille* $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *de points de* E *et pour toute famille* $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ *de points de* A *telle que* $\lim\limits_{\iota} \lambda_\iota = 0$ [1] *dans la topologie de* A, on a $\lim (\lambda_\iota x_\iota) = 0$ *dans la topologie de* E.

Preuve. Rappelons d'abord que $\mathfrak{B}_A$ est un ensemble ordonné filtrant à gauche pour la relation d'inclusion $(\subset)$, et que pour chaque $V \in \mathfrak{B}_A$, il existe un indice $\iota \in I$ et un seul tel que $V = V_\iota = \varphi(\iota)$. Montrons maintenant que la condition est nécessaire.

En effet, on a:

$$\{B \text{ borné dans } E\} \Rightarrow \{\forall V_E \in \mathfrak{B}_E \,,\ \exists \varkappa \in I \text{ tel que } V_x \cdot B \subset V_E\}.$$

D'autre part,

$$\{\lim \lambda_\iota = 0 \in A\} \Rightarrow \{\text{pour chaque } \xi \in I \,,\ \exists \iota_0 \in I \text{ tel que } \lambda_\iota \in V_\xi \text{ pour } \iota \geq \iota_0\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{\text{pour chaque } \xi \in I, \text{ on a } \lambda_\iota x_\iota \in V_\xi x_\iota \text{ pour } \iota \geq \iota_0\}.$$

Mais les ensembles I et $\mathfrak{B}_A$ étant filtrants, $\exists \nu \in I$ tel que $\xi \leq \nu$, et $\varkappa \leq \nu$ impliquent $V_\nu \subset V_\xi$ et $V_\nu \subset V_\varkappa$. Choisissons ι_0 tel que $\lambda_\iota \in V_\nu \subset V_\varkappa$ pour chaque $\iota \geq \iota_0$. On en déduit que:

$\forall V_E \in \mathfrak{B}_E \,,\ \exists \iota_0 \in I$ tel que $\lambda_\iota x_\iota \in V_\iota x_\iota \subset V_E$ pour tout $\iota \geq \iota_0$; d'où $\lim \lambda_\iota x_\iota = 0$ dans E.

Inversement, prouvons que si, pour toute famille $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ de points de B telle que $\lim \lambda_\iota = 0 \in A$, on a $\lim \lambda_\iota x_\iota = 0$ pour toute famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de points de B, alors B est borné dans E.

Démonstration par l'absurde. Supposons que sous ces hypothèses B ne soit pas borné. Alors.

$$\forall \varkappa \in I \quad , \quad \exists V_E \in \mathfrak{B}_E \qquad \text{tel que} \quad V_\varkappa \cdot B \not\subset V_E .$$

(1) $\lim\limits_{\iota} \lambda_\iota = 0 \in A$ signifie que, si u est une application de I dans A, et si $\mathfrak{F}_I$ est le filtre des sections de I, alors le filtre sur A ayant pour base l'ensemble $u(\mathfrak{F}_I)$ converge vers 0 dans A, i.e. $\forall V \in \mathfrak{B}_A \,,\ \exists \iota_0 \in I$ tel que $\lambda_\iota \in V_A \,,\ \forall \iota \geq \iota_0$.

Mais $\{\lim_{\iota} \lambda_\iota = 0 \in A\} \Rightarrow \{\exists \iota_0 \in I$ tel que $\lambda_\iota \in V_\xi$ pour $\iota \geq \iota_0, \xi \in I\}$, et $\{\mathfrak{B}_A$ ordonné filtré à gauche pour $(\subset)\} \Longleftrightarrow \{\exists \nu \in I$ tel que $\xi \leq \nu$ et $\varkappa \leq \nu$ entrainent $V_\nu \subset V_\xi$ et $V_\nu \subset V_\varkappa\}$. Si l'on choisit ι_0 tel que $\lambda_\iota \in V_\nu$ pour $\iota \geq \iota_0$, on a:

$$\lambda_\iota x_\iota \in V_\nu x_\iota \subset V_\varkappa x_\iota \subset V_\varkappa B \not\subset V_E,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que $\lim \lambda_\iota x_\iota = 0 \in E$. – Le théorème est donc démontré.

COROLLAIRE. – *Sous les hypothèses du théorème 1, si, en outre, on suppose que le filtre* $\mathfrak{B}_A$ *des voisinages de* 0 *dans* A *possède une base dénombrable, alors un sous-ensemble* B *de* E *est borné dans* E *si, et seulement si, pour toute suite* (x_n) *de points de* E *et pour toute suite* (λ_n) *de points de* A *telle que* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ *dans* A, *on a* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = 0$ *dans* E.

La démonstration est triviale, en prenant $I = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N., *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. III–IV (1964).

[2] VASILACH S., *Ensembles bornés dans les modules topologiques*, « Comptes Rendus Acad. Sci. Paris », T. 267 (1968).