ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PAOLO MAROSCIA

Sugli omomorfismi tra spazi affini o proiettivi

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 49 (1970), n.5, p. 244–249.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_5_244_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sugli omomorfismi tra spazi affini o proiettivi.*
 Nota di PAOLO MAROSCIA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper we prove some new results about the homomorphisms between affine or projective spaces of dimensions > 2 . Some new characterizations of the isomorphisms between projective planes are also given.

1. - INTRODUZIONE

Il presente lavoro espone alcuni risultati relativi agli omomorfismi tra spazi affini o proiettivi, che si collegano a quelli ottenuti in [1], [3], [4], [5], [6], [7]. Più precisamente, all'inizio (n. 2) viene sviluppata una nuova dimostrazione del teorema secondo cui (cfr. [4]) «ogni omomorfismo tra due piani affini (finiti od infiniti) è necessariamente un isomorfismo»: tale dimostrazione, pur non essendo di tipo diretto come quella data in [4], risulta tuttavia assai semplice e non priva di interesse in quanto poggia su di un risultato relativo agli omomorfismi tra piani proiettivi. Successivamente (n. 3) vengono date alcune nuove caratterizzazioni degli isomorfismi tra piani proiettivi (affatto qualsiasi), le quali, a differenza di quelle esposte per esempio in [1], hanno carattere sintetico. Infine (n. 4) si estende il noto teorema di Hughes-Corbas sugli omomorfismi tra piani proiettivi finiti (cfr. ad esempio [3, teor. 2.1]) al caso di due spazi proiettivi (finiti) S_r, S'_r , con $r > 2$; e, sempre nello stesso numero, si dimostra una generalizzazione di un teorema ottenuto da Corbas in [4].

2. - SUGLI OMOMORFISMI TRA PIANI AFFINI

Definizione. — Dati due piani affini ⁽¹⁾ (o proiettivi ⁽²⁾) S_2 e S'_2 , chiameremo *omomorfismo* da S_2 a S'_2 ogni applicazione suriettiva $f: S_2 \rightarrow S'_2$ tale che terne di punti allineati di S_2 abbiano per immagini terne di punti allineati di S'_2 ⁽³⁾.

Diremo poi che $f: S_2 \rightarrow S'_2$ è un isomorfismo se, e soltanto se, f è iniettiva.

(*) Nella seduta del 14 novembre 1970.

(1) Per la definizione di piano affine cfr. [10, p. 212].

(2) Per la definizione di piano proiettivo (o piano grafico irriducibile) cfr. [10, p. 209]: in accordo con tale definizione, i piani proiettivi da noi studiati saranno non degeneri, cioè esisteranno quattro punti a tre a tre non allineati.

(3) Si verifica subito che le definizioni di omomorfismo tra piani affini (o proiettivi) da noi date sono equivalenti alle definizioni che si trovano per es. in [3] e in [4]: all'uopo basta tener presente la successiva Prop. 2.1.

Dimostriamo innanzitutto la:

2.1. — Se $f: S_2 \rightarrow S'_2$ è un omomorfismo tra due piani affini (o proiettivi) S_2 ed S'_2 , ogni retta di S_2 ha per immagine, in f , una retta di S'_2 .

Dimostrazione. — Infatti, ammesso per assurdo che esista una retta $S_1 \subset S_2$ tale che $f(S_1) \subset S'_1 \subset (S'_2)$, si fissino rispettivamente in S'_2 e in S_2 , com'è certamente possibile, un punto O' tale che $O' \notin S'_1$ e un punto O tale che $f(O) = O'$. Se si considerano le rette del fascio (di S_2) di centro O , si deduce subito che $f(S_2) \subset S'_2$, contrariamente al supposto.

Premettiamo alla dimostrazione del successivo teorema 2.2 il seguente:

LEMMA. — Condizione necessaria e sufficiente affinché un omomorfismo $f: S_2 \rightarrow S'_2$ tra due piani proiettivi S_2 ed S'_2 risulti un isomorfismo è che esista almeno una retta r' di S'_2 tale che $f^{-1}(r') = r \subset S_2$, essendo r una retta di S_2 .

Dimostrazione. — La necessità è ovvia. Per la sufficienza osserviamo innanzitutto che la restrizione (di f) $f_1: r \rightarrow f(r) = r'$ risulta una corrispondenza biunivoca: all'uopo basta provare, stante la Prop. 2.1, che f_1 è iniettiva.

Invero, se esistessero due punti distinti di r , diciamoli P_1 e P_2 , tali che $f(P_1) = f(P_2) = P'$ allora, comunque si prendano in S_2 una retta r_1 passante per P_1 e distinta da r e una retta r_2 passante per P_2 e distinta da r , posto: $T = r_1 \cap r_2$, si avrebbe: $f(r_1) = f(r_2) = f(T) \cup P' \neq r'$ (in virtù dell'ipotesi: $f^{-1}(r') = r$). Pertanto, tenendo fissa la retta r_1 e variabile la retta r_2 (nel fascio di centro P_2), si avrebbe: $f(S_2) = r' \cup f(r_1)$ (4); ma ciò è assurdo, poiché S'_2 è non degenera.

Mostriamo infine che $f: S_2 \rightarrow S'_2$ è una corrispondenza (puntuale) biunivoca: basta far vedere che ogni punto $Q' \in S'_2 - r'$ proviene, tramite la f^{-1} , da un solo punto Q di S_2 .

Infatti, se, fissato ad arbitrio un punto $Q' \in S'_2 - r'$, esistessero due punti distinti Q_1 e Q_2 in S_2 , tali che $f(Q_1) = f(Q_2) = Q'$, allora, preso comunque un punto R' su r' e posto $R = f_1^{-1}(R')$, le rette $r_1 = R \cup Q_1$ e $r_2 = R \cup Q_2$ avrebbero ciascuna come immagine, nella f , la retta $R' \cup Q'$ (cfr. 2.1), cioè: $f(r_1) = f(r_2) = R' \cup Q'$. Inoltre, scelto comunque un punto $T_1 \in r_1$ tale che $T_1 \neq R$ e considerato in S_2 il fascio di rette di centro T_1 , si ha — in virtù del fatto che $f_1: r \rightarrow r'$ è, per quanto sopra dimostrato, una corrispondenza biunivoca — che $f(r_2) = R' \cup f(T_1)$ (4); ma ciò è contro le ipotesi, avendo supposto S_2 non degenera.

Il lemma è così completamente dimostrato.

Siamo ora in grado di provare il teorema (cfr. [4]):

2.2. — Ogni omomorfismo $f: S_2 \rightarrow S'_2$, essendo S_2 ed S'_2 piani affini qualsiasi, risulta un isomorfismo.

Dimostrazione. — Infatti, denotati con $\bar{S}_2$ ed $\bar{S}'_2$ i piani proiettivi ottenuti da S_2 ed S'_2 rispettivamente, aggiungendovi le rette all'infinito r ed r' ,

(4) Si noti che, in questo caso, il simbolo $\cup$ è usato in senso insiemistico.

talché $\bar{S}_2 = S_2 \cup r$ e $\bar{S}'_2 = S'_2 \cup r'$, consideriamo l'applicazione $g: \bar{S}_2 \rightarrow \bar{S}'_2$ così definita:

$$g(P) \begin{cases} = f(P), & \text{se } P \in S_2 \\ = f(s) \cap r', & \text{se } P = r \cap s, \text{ essendo } s \text{ una retta arbitraria} \\ & \text{di } S_2, \text{ cioè se } P \in \bar{S}_2 - S_2. \end{cases}$$

Dimostriamo ora che $g(P)$ non dipende che da P : basta far vedere che comunque si prendano due rette parallele r_1 ed r_2 in S_2 , le loro immagini $f(r_1)$ e $f(r_2)$, in f (cfr. 2.1) o coincidono o sono parallele.

Infatti, se $f(r_1)$ e $f(r_2)$ fossero incidenti in un punto Q' , scelto su $f(r_1)$ un punto $P' \neq Q'$, e denotati rispettivamente con P e Q due punti di S_2 tali che $P \in r_1$ e $f(P) = P'$, $Q \in r_2$ e $f(Q) = Q'$, la retta $P \cup Q$ di S_2 , incidente alla retta r_1 (in P), avrebbe come immagine in f la retta $f(r_1)$. Ma allora, fissata comunque in S'_2 una retta s' parallela a $f(r_1)$, una qualunque retta s di S_2 tale che $f(s) = s'$, dovrebbe risultare, com'è subito visto, parallela sia alla retta r_1 che alla retta $P \cup Q$, il che è assurdo.

È chiaro inoltre che $g: \bar{S}_2 \rightarrow \bar{S}'_2$ porta punti allineati di $\bar{S}_2$ in punti allineati di $\bar{S}'_2$.

Mostriamo infine che g è un'applicazione suriettiva: all'uopo basta provare che ogni punto $Q' \in r'$ proviene, tramite la g^{-1} , da almeno un punto $Q \in \bar{S}_2$.

Infatti, fissato ad arbitrio un punto $Q' \in r'$ e scelta una retta s' di S'_2 avente Q' come punto all'infinito, consideriamo, com'è certamente possibile, una retta s di S_2 tale che $f(s) = s'$; si ha allora che $g(r \cap s) = Q'$ e quindi g è suriettiva.

Ne segue che $g: \bar{S}_2 \rightarrow \bar{S}'_2$ è un omomorfismo tra piani proiettivi, e per di più, tale che $g^{-1}(r') = r$: pertanto, in virtù del lemma, g è un isomorfismo e allora $f: S_2 \rightarrow S'_2$ risulta chiaramente un isomorfismo.

3. - ALCUNE CARATTERIZZAZIONI DEGLI ISOMORFISMI TRA PIANI PROIETTIVI

Dimostriamo la seguente proposizione:

3.1. - *Sia $f: S_2 \rightarrow S'_2$ un omomorfismo tra due piani proiettivi qualsiasi. Le seguenti affermazioni sono allora tra loro equivalenti:*

- (a) *f risulta un isomorfismo;*
- (b) *f muta rette distinte di S_2 in rette distinte di S'_2 ;*
- (c) *esiste un punto $P' \in S'_2$ tale che $f^{-1}(P') = P \in S_2$;*
- (d) *esiste una retta $r' \subset S'_2$ tale che $f^{-1}(r') = r \subset S_2$;*
- (e) *esistono un punto $P' \in S'_2$ e una retta $\bar{r} \subset S_2$ tali che $f^{-1}(P') \subset \bar{r}$;*
- (f) *esistono un punto $P' \in S'_2$ e una retta $\bar{r} \subset S_2$ tali che $f^{-1}(P') \cap \bar{r} = P \in S_2$.*

Dimostrazione. — È ben noto che (a) implica (b), (c), (d), (e), (f).

Proviamo che (b) implica (a). Invero, se f muta rette distinte di S_2 in rette distinte di S'_2 , allora (cfr. 2.1) f induce una corrispondenza biunivoca tra le rette di S_2 e le rette di S'_2 e quindi, in virtù del principio di dualità, f risulta un isomorfismo.

Abbiamo già visto (cfr. il lemma del numero precedente) che (d) implica (a): ebbene, dualmente, si ha che (c) implica (a).

Proviamo ora che (e) implica (c). Infatti, se esistessero due punti distinti P_1 e P_2 di $\bar{r}$ tali che $f(P_1) = f(P_2) = P'$, allora, detta r_1 la retta generica del fascio di centro P_1 , o si avrebbe in ogni caso: $f(r_1) = f(\bar{r})$, il che è manifestamente assurdo, oppure ⁽⁵⁾ esisterebbe almeno una retta $\bar{r}_1$ per P_1 tale che $f(\bar{r}_1) = \bar{r}' \neq f(\bar{r})$; ma in tal caso, fissata comunque una retta r_2 passante per P_2 e distinta da $\bar{r}$, si avrebbe: $f(r_2) = \bar{r}'$, da cui: $f(S_2) = f(\bar{r}) \cup \bar{r}'$, il che è contro le ipotesi, essendo S'_2 non degenerare.

Mostriamo infine che (f) implica (c). Infatti, se esistesse un punto $\bar{P} \notin \bar{r}$ tale che $f(\bar{P}) = P'$, allora ogni retta di S_2 passante per $\bar{P}$ e distinta dalla retta $P\bar{P}$ avrebbe come immagine, nella f , la retta $f(\bar{r})$ (in virtù dell'ipotesi: $f^{-1}(P') \cap \bar{r} = P$), e quindi $f(S_2) = f(\bar{r}) \cup f(P\bar{P})$, il che è assurdo, poiché S'_2 è non degenerare.

4. — SUGLI OMOMORFISMI TRA SPAZI AFFINI O PROIETTIVI DI DIMENSIONI > 2

Definizione. — Dati due spazi affini ⁽⁶⁾ (o proiettivi ⁽⁷⁾) S ed S' di dimensioni ≥ 2 , chiameremo *semicollineazione generalizzata suriettiva* (cfr. [2, n. 18]) o anche *omomorfismo* ⁽⁸⁾ da S a S' , ogni applicazione suriettiva $f: S \rightarrow S'$ tale che terne di punti allineati di S abbiano per immagini terne di punti allineati di S' (eventualmente coincidenti).

Diremo poi che f è una collineazione o anche un isomorfismo, tra S e S' , se, e soltanto se, f è iniettiva.

Premettiamo il seguente:

LEMMA. — Sia $f: S_r \rightarrow S'_r$ un omomorfismo tra due spazi proiettivi (affini) qualsiansi S_r ed S'_r , con $r > 2$.

Allora:

a) f muta ogni spazio subordinato S_h di S_r in uno spazio subordinato S'_h di S'_r , cioè $f(S_h) = S'_h \subseteq S'_r$, con $0 \leq h \leq r$;

b) la restrizione (di f) $\bar{f}: S_h \rightarrow f(S_h)$, con $h \geq 2$, risulta un omomorfismo.

(5) È chiaro che, a priori, non vi sono altre eventualità.

(6) Per la definizione di spazio affine cfr. [10, p. 215].

(7) Per la definizione di spazio proiettivo (o spazio grafico irriducibile) cfr. [8, p. 102].

(8) Per la definizione di omomorfismo tra spazi di dim. > 2 , cfr. anche [7].

Dimostrazione. - Proviamo innanzitutto che f muta ogni retta di S su una retta di S' .

Infatti, se esistesse una retta S_1 di S_r tale che $f(S_1) \subset S'_1 \subset S'_r$, allora, scelto (com'è chiaramente possibile) un punto P di S_r tale che $f(P) \notin S'_1$, il piano $S_2 = P \cup S_1$ avrebbe una immagine $f(S_2)$ contenuta propriamente nel piano $S'_2 = f(P) \cup S'_1$. È chiaro che un'analogha argomentazione potrebbe venire iterata fino ad avere una relazione del tipo: $f(S_r) \subset S'_r$, il che è contro le ipotesi.

Proviamo ora che, comunque si prenda uno spazio subordinato S_h di S_r , con $h \geq 2$, $f(S_h)$ risulta uno spazio subordinato di S'_r : all'uopo occorre mostrare che, se P' e Q' sono due punti arbitrari e distinti di $f(S_h)$, ogni punto X' allineato con P' e Q' appartiene a $f(S_h)$.

Infatti, fissati comunque in S_r due punti P e Q tali che $f(P) = P'$ e $f(Q) = Q'$, è chiaro che la retta $PQ \subset S_h$ ha come immagine, nella f , la retta $P'Q'$, per quanto sopra dimostrato, e quindi $X' \in f(S_h)$.

Allora, una catena di r spazi subordinati di S_r del tipo:

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{r-1} \subset S_r$$

viene mutata da f in una catena di r spazi subordinati di S'_r :

$$S'_1 = f(S_1) \subset f(S_2) \subset \dots \subset f(S_{r-1}) \subset S'_r.$$

Ma, poiché nella catena iniziale le inclusioni sono proprie e inoltre, per ipotesi, $\dim S = \dim S' = r$, è chiaro che valgono le seguenti relazioni:

$$\dim [f(S_h)] = h \quad (h = 1, 2, \dots, r).$$

Pertanto l'affermazione *a)* è completamente dimostrata; per concludere, basta osservare che la restrizione (di f) $\bar{f}: S_h \rightarrow f(S_h)$ porta chiaramente terne di punti allineati di S_h in terne di punti allineati di $f(S_h)$, e quindi $\bar{f}$ risulta un omomorfismo.

Siamo ora in grado di dimostrare sull'argomento i risultati cui abbiamo accennato nell'Introduzione.

4.1. - *Ogni omomorfismo $f: S_r \rightarrow S'_r$ tra due spazi proiettivi finiti S_r ed S'_r di ordini ⁽⁹⁾ rispettivi q e q' (con $r \geq 3$ e $q, q' \geq 2$) è un isomorfismo.*

Dimostrazione. - Infatti, fissato comunque in S_r un piano $S_{2,q}$, la restrizione (di f) $f_1: S_{2,q} \rightarrow f(S_{2,q}) = S'_{2,q'}$, risulta un omomorfismo, in virtù del lemma precedente; ma allora f_1 è necessariamente un isomorfismo (cfr. ad esempio [3, teor. 2.1]) e quindi si ha: $q = q'$, da cui: $|S_{r,q}| = |S'_{r,q'}|$, epper tanto f è un isomorfismo.

4.2. - *Ogni omomorfismo $f: S_r \rightarrow S'_r$ tra due spazi affini S_r ed S'_r qualsiasi, con $r \geq 3$, è un isomorfismo.*

(9) Per la definizione di ordine di uno spazio proiettivo finito cfr. [9; n. 98, n. A1], [10, p. 217].

Dimostrazione. – Infatti, comunque si prenda in S_r un piano S_2 , la restrizione (di f) $f_1: S_2 \rightarrow f(S_2) = S'_2$ è ancora un omomorfismo, in virtù del lemma precedente; ma allora f è un isomorfismo (cfr. [4]) e quindi f muta rette distinte e complanari di S_r in rette distinte e complanari di S'_r .

Ne segue che $f: S_r \rightarrow S'_r$ è iniettiva. Infatti, se per assurdo esistessero due punti distinti P_1 e P_2 di S_r , tali che $f(P_1) = f(P_2) = P'$, allora, considerato in S_r un punto $\bar{P}$ tale che $f(\bar{P}) \neq P'$ e $\bar{P} \notin P_1 P_2$ ⁽¹⁰⁾, le rette $\bar{P}P_1$ e $\bar{P}P_2$ avrebbero ciascuna come immagine, nella f , la retta $P' \cup f(\bar{P})$ (cfr. 2.1); ma ciò contraddice quanto abbiamo dimostrato sopra.

Dunque $f: S_r \rightarrow S'_r$ è un isomorfismo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. BARTOLOZZI, *Alcune considerazioni relative agli omomorfismi tra piani proiettivi*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), 45, 478–484 (1968).
- [2] P. V. CECCHERINI, *Collineazioni e semicollineazioni tra spazi affini o proiettivi*, « Rend. Mat. e Appl. », (5), 26 (1967).
- [3] V. CORBAS, *Omomorfismi tra piani proiettivi*, I, « Rend. Mat. e Appl. » (5), 23 (1964).
- [4] V. CORBAS, *La non esistenza di omomorfismi propri tra piani affini*, « Rend. Mat. e Appl. », (5), 24 (1965).
- [5] P. DEMBOWSKI, *Homomorphismen von λ -Ebenen*, « Arch. Math. », 10, 46–50 (1959).
- [6] D. R. HUGHES, *On homomorphisms of projective planes*, « Combinatorial Analysis Proc. of Symp. in Applied Math. », 10, 45–52 (1960).
- [7] W. KLINGENBERG, *Projective Geometrien mit Homomorphismus*, « Math. Ann. », 132, 180–200 (1956).
- [8] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*. – Vol. I: *Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi*. Bologna, Zanichelli, 1948.
- [9] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry* (con appendice di L. Lombardo Radice), « Edizioni Cremonese », Roma 1961.
- [10] B. SEGRE, *Istituzioni di geometria superiore* (a. a. 1963–64). Lezioni raccolte da P. V. Ceccherini [3 voll. mimeogr.]. Roma Istituto Matematico « G. Castelnuovo » (1965). Vol. II: *Spazi proiettivi*.

(10) Si noti che un punto $\bar{P}$ siffatto esiste certamente in S_r , in virtù del lemma sopra dimostrato.