Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Anna Marisa Merri Manarini

Sui parametri ellittici delle orbite osculatrici nel problema dei due corpi di massa variabile

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.3-4, p. 208–213.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_3-4_208_0>

Meccanica. — *Sui parametri ellittici delle orbite osculatrici nel problema dei due corpi di massa variabile* [(*)]. Nota [(**)] di ANNA MARISA MERRI MANARINI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — By means of the adiabatic invariants theory we investigate the behaviour of the elliptic parameters in the problem of the two bodies with slowly variable mass.

La letteratura sul problema dei due corpi di massa variabile è molto vasta e non è certo il caso di citarla in modo completo nel presente lavoro. Ci limiteremo solo a ricordare che, nel caso astronomico, la variazione di massa è, in generale, estremamente lenta e graduale, per cui è lecito applicare la teoria degli invarianti adiabatici e le considerazioni che ad essa si collegano.

I principali risultati che se ne deducono (vedi bibliografia) possono essere riassunti nel modo seguente. Detto B il prodotto fra la massa complessiva dei due corpi e la costante di gravitazione e assunto $\dot{b} = \dot{B}/B$ dell'ordine di ε (si potrebbe rendere $\dot{b}$ adimensionale sostituendo al tempo siderale t un tempo adimensionale $t' = t/\tau_0$, dove τ_0 è il periodo dell'orbita osculatrice all'istante iniziale [(1)]), la teoria degli invarianti adiabatici porta anzitutto al risultato che in un intervallo di tempo dell'ordine di $1/\varepsilon$ e a meno di termini dell'ordine di ε l'eccentricità dell'orbita osculatrice è costante, mentre il semiasse maggiore risulta inversamente proporzionale a B.

È poi del tutto ovvio che, essendo il piano dell'orbita fisso, l'inclinazione dell'orbita e la longitudine del nodo ascendente sono rigorosamente costanti. Non mi risulta invece siano state fatte ricerche sul modo di variare dei rimanenti due parametri ellittici (che, insieme ai precedenti, individuano l'orbita osculatrice), cioè l'epoca del passaggio al perielio e la longitudine del perielio, salvo un teorema di Lehmann-Filhés di cui dirò più avanti.

In questa Nota, valendomi di recenti risultati sugli invarianti adiabatici, ho anzitutto provato che, a meno di termini dell'ordine di ε^2, l'eccentricità è una funzione dell'anomalia eccentrica che assume sempre lo stesso valore al perielio e all'afelio.

Lo stesso risultato, come è noto, vale in modo rigoroso nel caso in cui la legge di variazione delle masse sia quella di Jeans-Eddington; qui invece è stato ottenuto per qualsiasi legge di variazione, salvo naturalmente termini dell'ordine di ε^2.

Ho poi determinato, a meno di termini dell'ordine di ε, l'epoca del passaggio al perielio per l'orbita osculatrice nel generico istante t, nonché la

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Contratto di Ricerca n. 5 del C.N.R., n. 115.2210.
(**) Pervenuta all'Accademia il 22 settembre 1970.

(1) Per orbita osculatrice all'istante t si intende l'orbita percorsa da un corpo rispetto all'altro qualora all'istante t la massa cessasse di variare.

successione degli istanti per cui, nel moto vero, un corpo si trova a distanza minima dall'altro (successivi passaggi al perielio).

Infine ho dimostrato che, sempre in un intervallo di tempo dell'ordine di $1/\varepsilon$, la longitudine del perielio rimane costante a meno di termini dell'ordine di ε. Viene così ritrovata in maniera forse più rigorosa e per qualunque legge di variazione delle masse tale proprietà, enunciata da Lehmann–Filhés (2) nel caso di variazione lineare e in un breve intervallo di tempo.

1. Consideriamo due corpi puntiformi O e P, rispettivamente di massa M e m, la cui somma sia variabile nel tempo in modo estremamente lento e graduale, come meglio preciseremo più innanzi. Detti r la distanza dei due punti, C la costante delle aree, k la costante di gravitazione, l'Hamiltoniana del moto di P relativo ad una terna O (X , Y , Z) di origine in O ed assi diretti verso stelle fisse ha, come è ben noto, la seguente espressione:

$$\mathrm{H}(r\,,p\,,\mathrm{B}) = \frac{p^2}{2} + \frac{\mathrm{C}^2}{2\,r^2} - \frac{\mathrm{B}}{r}$$

dove si è posto:

$$p = \dot r \quad , \quad \mathrm{B} = k\,(\mathrm{M} + m).$$

Posto inoltre per semplicità $\mathrm{B}(t) = e^{b(t)}$ e assunto $\dot b$ dell'ordine di ε, supponiamo siano verificate tutte le condizioni del paragrafo 2 della Nota [14] (3), le quali assicurano che, in un intervallo di tempo dell'ordine di $1/\varepsilon$, il moto tangente risulta periodico e l'integrale di Bohr–Sommerfeld risulta costante a meno di termini dell'ordine di ε. In particolare deve essere, adottando lo stesso simbolismo:

$$\ddot b\,(t) = \mathrm{O}\,(\varepsilon^2) \quad , \quad \dddot b\,(t) = \mathrm{O}\,(\varepsilon^3).$$

Eseguendo la trasformazione canonica dalle variabili r e p alle nuove variabili coniugate w e J, con

$$\mathrm{J} = 2\,\pi\mathrm{C} + \oint p\,dr = \frac{2\,\pi\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}}} \quad , \quad \mathrm{A} = -2\,\mathrm{H}\,,$$

le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili risultano:

$$\dot{\mathrm{J}} = -\dot b\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial w} \quad , \quad \dot w = \frac{1}{\tau} + \dot b\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{J}}\,,$$

dove V è la derivata della funzione generatrice della trasformazione canonica rispetto al parametro b (tenendo costanti le variabili J e r) e $\tau\,(t)$ è il periodo del moto tangente all'istante t.

(2) LEHMANN–FILHES, *Ueber Centralbewegungen*, « Astr. Nachrichten », *B. 145*, n. 3479–80 (1898).

(3) I numeri fra parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia.

Detti $a(t)$ ed $e(t)$ rispettivamente il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita osculatrice all'istante t e posto

$$r = a(1 - e \cos u), \tag{1}$$

risulta (vedi Nota [13]):

$$w = \frac{1}{2\pi}(u - e \operatorname{sen} u), \tag{2}$$

$$V = \frac{Je}{2\pi} \operatorname{sen} u \tag{3}$$

$$e^2 = 1 - \frac{4\pi^2 C^2}{J^2} \quad , \quad a = \frac{J^2}{4\pi^2 B} \quad , \quad \tau = \frac{J^3}{4\pi^2 B^2}. \tag{4}$$

Ricordiamo inoltre che è:

$$p = \dot{r} = \sqrt{A}\, \frac{e \operatorname{sen} u}{1 - e \cos u} = \frac{B}{C} \sqrt{1 - e^2}\, \frac{e \operatorname{sen} u}{1 - e \cos u}, \tag{5}$$

per cui il perielio e l'afelio si hanno quando è sen $u = 0$ (precisamente, la distanza r è minima per $u = 2n\pi$ ed è massima per $u = (2n + 1)\pi$).

Supponendo per semplicità che per $t = 0$ sia $u = 0$ (ipotesi del resto non restrittiva perché equivale a contare il tempo dall'epoca di un passaggio al perielio), le formule (13), (14) e (37) della Nota [14] si semplificano [4] e, per quanto ivi è dimostrato, potremo scrivere:

$$J(t) = J_0 - \dot{b}\tau V(t) + O(\varepsilon^2) \tag{6}$$

$$w(t) = \int_0^t \frac{dt}{\tau(J_0, B)} + O(\varepsilon) = \frac{4\pi^2}{J_0^3} \int_0^t B^2\, dt + O(\varepsilon). \tag{7}$$

2. Cominciamo col dimostrare la proprietà relativa all'eccentricità enunciata nell'introduzione.

Sostituendo la (3) nella (6) ed osservando che, essendo l'eccentricità funzione solo di J, si ha:

$$Je = J_0 e_0 + O(\varepsilon),$$

otterremo:

$$J(t) = J_0 - \dot{b}\frac{\tau}{2\pi} J_0 e_0 \operatorname{sen} u + O(\varepsilon^2). \tag{8}$$

Essendo poi:

$$\frac{de}{dJ} = \frac{1 - e^2}{Je}$$

(4) Osserviamo che nella Nota [14] J_1 non è altro, a meno di termini dell'ordine di ε^2, che il valore assunto da J quando P si trova al perielio o all'afelio.

dalla (8) si avrà infine:

$$e(t) = e_0 - \dot{b}\frac{\tau}{2\pi}(1 - e_0^2)\ \text{sen}\ u + O(\varepsilon^2), \tag{9}$$

conformemente a quanto si è detto nell'introduzione (5).

Vogliamo ora determinare l'epoca del passaggio al perielio per l'orbita osculatrice all'istante t, che indicheremo con $T(t)$. Per l'equazione di Keplero, sarà:

$$u - e\ \text{sen}\ u = \frac{2\pi}{\tau}[t - T(t)]$$

e quindi, per la (2):

$$T(t) = t - \tau(t)\, w(t).$$

Ricordando la (7) potremo allora scrivere:

$$T(t) = t - \frac{J^3}{J_0^3}\frac{\int_0^t B^2\, dt}{B^2(t)} + O(\varepsilon).$$

Osserviamo che se t è molto grande, non è lecito sostituire nell'espressione precedente J_0 al posto di J. Tuttavia, essendo:

$$\frac{J^3}{J_0^3} = 1 - 3\dot{b}\frac{\tau}{2\pi}e_0\ \text{sen}\ u + O(\varepsilon^2),$$

sarà invece sempre possibile scrivere:

$$T(t) = t - \frac{\int_0^t B^2\, dt}{B^2(t)} + \frac{3\dot{b}}{B^2}\frac{J_0^3}{8\pi^3}e_0\ \text{sen}\ u\frac{\int_0^t B^2\, dt}{B^2(t)} + O(\varepsilon), \tag{10}$$

dove evidentemente il penultimo termine sarà anch'esso dell'ordine di ε finché t non è molto grande ed è rigorosamente nullo per sen $u = 0$ (passaggio al perielio o all'afelio).

Se ad esempio si ammette che valga per la massa la legge di variazione di Eddington–Jeans $\dot{B} = -fB^3$, con f costante molto piccola, con semplici passaggi si ottiene:

$$T(t) = t - \frac{\log(1 + 2fB_0^2 t)}{2fB^2(t)} - \frac{3}{2}\frac{J_0^3}{8\pi^3}e_0\ \text{sen}\ u\frac{\log(1 + 2fB_0^2 t)}{B^2(t)} + O(\varepsilon).$$

Determiniamo ora l'istante dell'ennesimo passaggio al perielio, che indicheremo con t_n. Poiché u è funzione sempre crescente del tempo, sarà

(5) Osserviamo che, per la (2) e la (7) u è facilmente ottenibile in funzione del tempo a meno di termini dell'ordine di ε ed è inoltre funzione sempre crescente del tempo (vedi Nota [6], formula (6), da cui risulta $\dot{u} > 0$).

$u(t_n) = 2\pi n$ e quindi, per la (2), $w(t_n) = n$. Per la (7) si avrà allora:

$$\int_0^{t_n} \frac{B^2}{B_0^2}\, dt = n\tau_0 + O(\varepsilon), \tag{11}$$

da cui, noto $B(t)$, si potrà determinare t_n a meno di termini dell'ordine di ε. Se ad esempio vale la legge di Eddington–Jeans, si ottiene con semplici passaggi:

$$t_n = \frac{e^{2fB_0^2 n\tau_0} - 1}{2fB_0^2} + O(\varepsilon).$$

Resta ora da considerare la longitudine del perielio dell'orbita osculatrice all'istante t, ossia l'angolo $\varphi(t)$ che l'asse maggiore di tale orbita, che indicheremo con x, forma con l'asse nodale (intersezione del piano XY col piano fisso dell'orbita).

Detto x_0 l'asse maggiore dell'orbita osculatrice all'istante $t = 0$ e φ_0 l'angolo fra x_0 e l'asse nodale, si avrà:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t), \tag{12}$$

dove $\omega(t)$ è l'angolo fra x e x_0, nullo quindi per $t = 0$.

È facile mostrare che $\omega(t)$ è dell'ordine di ε. Infatti per una nota equazione dell'Armellini (6) si ha:

$$\dot{\omega} = -\frac{\dot{b}}{e} \operatorname{sen} v$$

dove $v(t)$ è l'anomalia vera per l'orbita osculatrice all'istante t (angolo fra $P - O$ e x). Sarà quindi:

$$\omega(t) = \int_0^t -\frac{\dot{b}}{e} \operatorname{sen} v\, dt. \tag{13}$$

Ricordando che, essendo $r = C^2/B\,(1 + e\cos v)$, il legame fra l'anomalia vera v e l'anomalia eccentrica u per la (1) è il seguente:

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} \quad \text{e quindi} \quad \operatorname{sen} v = \sqrt{1 - e^2}\, \frac{\operatorname{sen} u}{1 - e\cos u}$$

dalla (5) si ottiene:

$$\operatorname{sen} v = \frac{C}{Be}\, p.$$

(6) Confr. G. ARMELLINI, *Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili*, « Rend. Lincei », fasc. 11 (1926).

Sostituendo nella (13) ed integrando per parti, si ha:

$$\omega(t) = -\int_0^t \frac{\dot{b}C}{Be^2}\,\dot{r}\,dt = -C\left[\frac{\dot{b}r}{Be^2}\right]_0^t + C\int_0^t r\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{b}}{Be^2}\right)dt = O(\varepsilon)$$

come si ottiene osservando che $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{b}}{Be^2}\right)$ è dell'ordine di ε^2.

Per la (12) possiamo quindi concludere che, a meno di termini dell'ordine di ε, la longitudine del perielio rimane costante.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. LEVI CIVITA, *Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici*. Atti del Congresso Internazionale di Matematica, Bologna 1928, tomo V, 17–28.

[2] T. LEVI CIVITA, «Opere», *4*, 574–589, Zanichelli (1960).

[3] D. GRAFFI, *Gli invarianti adiabatici come metodo di integrazione approssimata di equazioni differenziali*. «Rend. Lincei», *15*, 657–663 (1932).

[4] D. GRAFFI, *Limitazioni dei valori degli invarianti adiabatici con applicazione al problema delle masse variabili*. «Atti Acc. Scienze di Torino», *68*, 262–272, 459–482 (1933).

[5] P. BURGATTI, *Intorno agli effetti che produce sulle orbite delle binarie la perdita di massa per radiazione*. «Acc. delle Scienze di Bologna», *11* (1933).

[6] D. GRAFFI, *Sopra un caso speciale del problema dei due corpi di massa variabile*. «Boll. U.M.I.» (1934).

[7] G. BEMPORAD, *Sulle variazioni dell'eccentricità nelle orbite dei sistemi binari*. «Rend. Acc. Lincei», *19* (1934).

[8] H. VON SCHELLING, *Zur Evolution der Doppelsternbahnen*. «Astr. Nachr.», n. 6190 (1936).

[9] D. GRAFFI, *Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici*. «Ann. di Mat. Pura e Appl.», *15*, 87–128 (1936–37).

[10] D. GRAFFI, *Sul problema dei due corpi di massa variabile*. «Ann. Univ. di Ferrara», *1*, 23–33 (1951).

[11] L. CHIARA, *Sulla variazione dell'eccentricità nel problema teorico dei due corpi di masse variabili. Casi riconducibili alle quadrature*. «Atti Acc. SS. LL. AA. Palermo» (1963).

[12] L. CHIARA, *Sul problema dei due corpi di massa decrescente. Variazione dell'eccentricità e dell'anomalia vera per la legge di emissione* $-\dot{m}/m^3 =$ *costante*. «Atti Acc. SS. LL. AA. Palermo» (1963).

[13] D. GRAFFI, *Upper Bounds to the Variations of the Bohr–Sommerfeld integrals in cases of imperfect adiabaticity*. «Meccanica», *1* (1966).

[14] D. GRAFFI, *Gli invarianti adiabatici come metodo di integrazione approssimata di equazioni differenziali*. «Periodico di Mat.», *46*, 175–184 (1968).