Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Bompiani

Le varietà le cui superficie hanno spazi 2-osculatori di dimensione inferiore alla normale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.3-4, p. 190–193.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_3-4_190_0>

Geometria differenziale. — *Le varietà le cui superficie hanno spazi 2–osculatori di dimensione inferiore alla normale.* Nota [(*)] del Socio Enrico Bompiani.

SUMMARY. — New proof of a theorem given by F. Speranza on manifolds whose surfaces possess everywhere osculating spaces of dimensionality < 5.

1. Introduzione

In un lavoro recente F. Speranza [(1)] ha determinato le varietà V_k di uno spazio proiettivo P^n le cui superficie non ammettono spazi osculatori di dimensione regolare (cioè siano superficie i cui spazi osculatori hanno dimensione inferiore alla massima, ossia 4 o 3).

Esse sono:

a) gli spazi proiettivi a 4 e a 3 dimensioni P^4 e P^3;

b) le V_3 di P^4;

c) le V_3 luogo dei piani osculatori ad una curva (qualunque sia la dimensione dell'ambiente) e casi degeneri (luogo dei piani che da un punto proiettano le tangenti ad una curva; luogo di ∞^1 piani per una retta);

d) le superficie soddisfacenti ad almeno una equazione di Laplace (cioè le coordinate dei cui punti soddisfino ad almeno una equazione a derivate parziali lineare omogenea del 2° ordine).

Riprendo la trattazione del problema risolto dallo Speranza ponendomi anzitutto da un punto di vista locale cioè esaminando le *calotte* [(2)] superficiali del 2° ordine appartenenti ad una calotta di dimensione più elevata, pure del 2° ordine.

In questo indirizzo molte altre ricerche si presentano spontanee: ma non me ne occupo in questo lavoro.

(*) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1970.

(1) F. SPERANZA, *Le varietà le cui superficie non ammettono spazi osculatori di dimensione regolare*, « Atti Semin. Matem. e Fisico Univ. di Modena », vol. XVII (1968), pp. 247–251.

(2) Ricordo la nozione di *calotta* di assegnata dimensione h e di determinato ordine s di uno spazio proiettivo P^h $(n \geq h)$. Fissato un punto di P^h (che si dirà poi *centro* della calotta) si considerino le varietà V_h di classe di differenziabilità almeno C^s passanti per il punto ed aventi ivi contatto d'ordine s con una di esse. La relazione così posta è una relazione d'equivalenza (riflessiva, simmetrica, transitiva). Un elemento dell'insieme quoziente rispetto ad essa dell'insieme di tutte le V_h è una *calotta* di dimensione h e d'ordine s, σ_h^s.

In coordinate proiettive non–omogenee tutte nulle nel centro una σ_h^s di P^n si può rappresentare con sviluppi di $n - h$ coordinate in funzione delle rimanenti, determinati fino ai termini d'ordine s inclusi: i termini $> s$ che rimangono arbitrari si diranno costituire *l'indeterminazione* indicata con $[> s]$.

2. CALOTTE DI 2° ORDINE SUPERFICIALI APPARTENENTI AD UNA CALOTTA DI DIMENSIONE MAGGIORE

Sia σ_k^2 una calotta a k dimensioni e del 2° ordine di centro O appartenente ad uno spazio proiettivo P^n. Assumiamo in questo coordinate proiettive non omogenee x, y, z^ρ, t^i (con $\rho = 1, \cdots, k-2$ e $i = 1, \cdots, n-k$ quindi $k \geq 3$, $n > k$) tali che O sia rappresentato da $x = y = z^\rho = t^i = 0$ e lo spazio tangente P^k in O da $t^i = 0$. Con una scelta siffatta la σ_k^2 è rappresentata da equazioni del tipo

$$t^i = \varphi_2^i(x, y, z^\rho) + [>2], \qquad i = 1, \cdots, n-k \tag{2.1}$$

ove le φ_2^i sono forme quadratiche nelle x, y, z^ρ $(\rho = 1, \cdots, k-2)$ e $[>2]$ è l'indeterminazione nelle stesse variabili.

Per individuare una $\sigma_2^2 \subset \sigma_k^2$ poniamo

$$z^\rho = \alpha^\rho x + \beta^\rho y + \psi_2^\rho(x, y) + [>2], \qquad \rho = 1, \cdots, k-2 \tag{2.2}$$

(quest'ultima indeterminazione nelle x, y e ψ_2^ρ forma di 2° grado in x, y). Per esaminare l'insieme delle σ_2^2 in σ_k^2 converrà esplicitare la dipendenza delle φ_2^i dalle z^ρ. Poniamo perciò

$$\varphi_2^i(x, y, z^\rho) \equiv \theta_2^i(x, y) + (a_\rho^i x + b_\rho^i y) z^\rho + l_{\rho\sigma}^i z^\rho z^\sigma \tag{2.3}$$

con $\theta_2^i(x, y)$ forma quadratica in x, y (con $l_{\sigma\rho}^i = l_{\rho\sigma}^i$).

Indichiamo con $\Phi_2^i(x, y)$ la forma di 2° ordine in x, y che si ottiene sostituendo nelle $\varphi_2^i(x, y, z^\rho)$ le espressioni delle z^ρ date dalle (2.2), cioè

$$\begin{aligned} \Phi_2^i(x, y) &\equiv \theta_2^i(x, y) + (a_\rho^i x + b_\rho^i y)(\alpha^\rho x + \beta^\rho y) + \\ &\quad + l_{\rho\sigma}^i(\alpha^\rho x + \beta^\rho y)(\alpha^\sigma x + \beta^\sigma y) \\ &\equiv \theta_2^i(x, y) + (a_\rho^i \alpha^\rho + l_{\rho\sigma}^i \alpha^\rho \alpha^\sigma) x^2 + (b_\rho^i \beta^\rho + l_{\rho\sigma}^i \beta^\rho \beta^\sigma) y^2 + \\ &\quad + \{a_\rho^i \beta^\rho + b_\rho^i \alpha^\rho + l_{\rho\sigma}^i(\beta^\rho \alpha^\sigma + \alpha^\rho \beta^\sigma)\} xy . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lo spazio contenente la σ_2^2 in esame (definita dalle 2.1, 2.2) è quello definito dal punto O e dai punti derivati primi e secondi rispetto ad x ed y delle z^ρ (2.2) e delle $\Phi_2^i(x, y)$ (2.4) calcolati in O: siccome si sono assunte coordinate non-omogenee si può aggiungere per l'omogeneità un'ultima coordinata $= 1$ (in O) le cui derivate, tutte nulle, si possono omettere. Sicché si ha il quadro dei punti derivati

	x	y	z^ρ	t^i
∂_x	1	0	α^ρ	0
∂_y	0	1	β^ρ	0
∂_{xx}	0	0	$\partial_{xx}\psi_2^\rho$	$\partial_{xy}\theta_2^i + 2(a_\rho^i \alpha^\rho + l_{\rho\sigma}^i \alpha^\rho \alpha^\sigma)$
∂_{xy}	0	0	$\partial_{xy}\psi_2^\rho$	$\partial_{xy}\theta_2^i + a_\rho^i \beta^\rho + b_\rho^i \alpha^\rho + 2 l_{\rho\sigma}^i \beta^\rho \alpha^\sigma$
∂_{yy}	0	0	$\partial_{yy}\psi_2^\rho$	$\partial_{yy}\theta_2^i + 2(b_\rho^i \beta^\rho + l_{\rho\sigma}^i \beta^\rho \beta^\sigma)$

In generale il rango della matrice formata con le coordinate scritte (matrice a 5 righe e n colonne), se n come supponiamo è ≥ 5, vale 5 e la calotta σ_2^2 si dice *normale*; se vale 4 o 3 si dirà *iponormale* (e se vale 2 la calotta si dirà piana o inflessionale).

Posto:

$$\theta_2^i(x, y) \equiv a_{20}^i x^2 + 2 a_{11}^i xy + a_{02}^i y^2 \tag{2.5}$$

$$\psi_2^\rho(x, y) \equiv \gamma_{20}^\rho x^2 + 2\gamma_{11}^\rho xy + \gamma_{02}^\rho y^2 \tag{2.6}$$

la normalità o iponormalità della σ_2^2 dipende dall'essere la matrice

$$\begin{pmatrix} \gamma_{20}^\rho \cdots & a_{20}^i + a_\rho^i \alpha^\rho + l_{\rho\sigma}^i \alpha^\rho \alpha^\sigma & \cdots \\ \gamma_{11}^\rho \cdots & a_{11}^i + \frac{1}{2}(a_\rho^i \beta^\rho + b_\rho^i \alpha^\rho) + l_{\rho\sigma}^i \alpha^\rho \beta^\sigma & \cdots \\ \gamma_{02}^\rho \cdots & a_{02}^i + b_\rho^i \beta^\rho + l_{\rho\sigma}^i \beta^\rho \beta^\sigma & \cdots \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

di rango 3 ovvero ≤ 2.

3. Calotte di varietà con sole calotte superficiali iponormali del 2^0 ordine

Proponiamoci ora di cercare quelle σ_k^2 tali che *tutte* le loro σ_2^2 siano iponormali. Per esse la matrice (2.7) deve avere rango < 3 *quali si siano* le $\alpha^\rho, \beta^\rho, \gamma_{20}^\rho, \gamma_{11}^\rho, \gamma_{02}^\rho$.

Occorre ora distinguere vari casi secondo il valore di k.

Se $k \geq 5$ quindi se ρ assume almeno tre valori diversi 1, 2, 3 (ed eventualmente altri) già il determinante del 3^0 ordine, o uno di essi, formato con le sole γ dovrebbe essere sempre nullo per tutti i valori possibili delle γ: ciò è evidentemente assurdo, quindi deve essere $k \leq 4$.

Se $k = 4$ cioè $\rho = 2$, il determinante formato con le due colonne delle γ e una colonna residua deve esser nullo quali si siano le γ, perciò occorre e basta che siano nulli tutti i singoli elementi delle colonne residue e per valori qualsiansi di α, β. Ciò porta

$$\varphi_2^i(x, y, z^\rho) \equiv 0 \tag{3.1}$$

cioè $t^i = [> 2]$. Le $n - 4$ equazioni $t^i = 0$ rappresentano uno spazio P^4 che contiene tutta la σ_4^2. Questo caso è evidentemente possibile poiché $\sigma_2^2 \subset P^4$ quindi è iponormale.

Se $k = 3$, quindi $\rho = 1$ affinché la matrice (2.7) sia di rango ≤ 2 (con le $\varkappa, \beta, \gamma$ arbitrarie) occorre e basta che, per α e β qualsiasi, il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} a_{20}^i + a_\rho^i \alpha^\rho + l_{\rho\sigma}^i \alpha^\rho \alpha^\sigma & \cdots \\ a_{11}^i + \frac{1}{2}(a_\rho^i \beta^\rho + b_\rho^i \alpha^\rho) + l_{\rho\sigma}^i \alpha^\rho \beta^\sigma & \cdots \\ a_{02}^i + b_\rho^i \beta^\rho + l_{\rho\sigma}^i \beta^\rho \beta^\sigma & \cdots \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

sia 1 o zero.

Se vale zero si ritorna alle condizioni (3.1) e all'esistenza di un $P^3 \supset \sigma_3^2$ (poiché $i = 1, \cdots, n-3$); caso evidente.

Se il rango di (3.2) vale 1 cioè se tutti i determinanti del 2° ordine estratti da essa sono nulli per valori arbitrari delle α e β si ottengono facilmente le condizioni

$$\overset{i}{a}_{20} = k^i \overset{1}{a}_{20} \quad , \quad \overset{i}{a}_{11} = k^i \overset{1}{a}_{11} \quad , \quad \overset{i}{a}_{02} = k^i \overset{1}{a}_{02}$$

$$\overset{i}{a}_{\varrho} = k^i \overset{1}{a}_{\varrho} \quad , \quad \overset{i}{b}_{\varrho} = k^i \overset{1}{b}_{\varrho} \quad , \quad \overset{i}{l}_{\varrho\sigma} = k^i \overset{1}{l}_{\varrho\sigma}$$

con le k^i costanti, ossia (scrivendo z invece di z^1)

$$\varphi_2(x, y, z) \equiv k^i \varphi_2^1(x, y, z) . \tag{3.3}$$

Sostituendo alle t^i $(i \neq 1)$ le coordinate $t^i - k^i t^1$, che indicheremo ancora con t^i la σ_3^2 risulta rappresentata da

$$\begin{aligned} t^1 &= \varphi_2^1(x, y, z) + [>2] \\ t^i &= [>2] \qquad\qquad i = 2, \cdots, n-3 . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Queste provano che la σ_3^2 appartiene al P^4 di equazioni $t^i = 0$ $(i = 2, \cdots, n-3)$.

4. PASSAGGIO DALLE CALOTTE ALLE VARIETÀ

Passiamo dai fatti locali, relativi a calotte, a fatti globali relativi ad una V_k di cui tutte le σ_2^2 siano iponormali.

È chiaro da quanto si è detto che bisogna escludere $k \geq 5$.

Negli altri casi $(k = 4, 3)$ riferiamoci a coordinate proiettive omogenee qualsiansi, funzioni di k parametri, di classe C^∞. Ricordiamo che lo spazio tangente in un punto è determinato da questo e dai suoi punti derivati primi, quello 2–osculatore da questi e dai punti derivati secondi. Se lo spazio 2–osculatore ha dimensione iponormale le coordinate sono soluzioni di una o più equazioni a derivate parziali del 2° ordine lineari omogenee; insieme a queste valgono tutte le loro conseguenze differenziali.

Nel caso $k = 4$ si è visto che una σ_4^2 sta in un P^4 che è quindi sia tangente sia 2–osculatore nel punto centro di σ_4^2 alla V_4. Ciò equivale a dire che tutti i punti derivati secondi di un punto di V_4 sono legati linearmente al punto e ai suoi derivati primi. Ulteriori derivazioni darebbero sempre punti appartenenti al P^4 tangente: questo (o una regione di esso) è la V_4.

Nel caso $k = 3$ se nella prima (3.4) risultasse $\varphi_2^1(x, y, z) \equiv 0$ con lo stesso ragionamento ora fatto si concluderebbe che la V_3 è un P^4 o una sua regione.

Se invece $\varphi_2^1(x, y, z) \not\equiv 0$ lo spazio 2–osculatore in un punto di V_3 differirebbe dal P^3 tangente solo per una dimensione: il che vuol dire che dei sei punti derivati secondi cinque sono legati linearmente ed omogeneamente al punto dato, ai tre punti derivati primi e al rimanente punto derivato secondo.

Ciò porta che l'insieme dei P^3 tangenti è ad una dimensione: e siccome due P^3 tangenti infinitamente vicini stanno in P^4 essi si tagliano in un piano; e due di questi piani infinitamente vicini si tagliano in una retta.

Queste sono le V_3 indicate in *c*) del teorema di Speranza.