Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Edmundo Rofman

Teoremi di convergenza del metodo di collocazione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.3-4, p. 184–189.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_3-4_184_0>

Analisi numerica. — *Teoremi di convergenza del metodo di collocazione*. Nota di EDMUNDO ROFMAN (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — Convergence of collocation method for some functional equations is studied. First two sufficient conditions for convergence of approximating functions sequence are given and applied to different problems. Then these theorems are applied to ordinary differential equations.

Nella presente Nota si studia la convergenza del metodo di collocazione [1] per diversi tipi di equazioni funzionali. Nel corso del lavoro si metterà in evidenza perché è preferibile la scelta degli zeri di una famiglia di polinomi ortogonali come punti d'interpolazione.

Nella prima parte si stabiliscono due condizioni sufficienti ad assicurare la convergenza della successione di funzioni approssimanti.

Nella seconda parte si analizzano diversi casi nei quali si verificano le due condizioni dette, mentre nella parte finale si particolarizza lo studio per il caso delle equazioni differenziali ordinarie.

Si consideri nell'intervallo $[a, b]$ l'equazione funzionale nella incognita $u \in L^2[a, b]$:

$$u + Ku = f \tag{1}$$

dove $K : L^2[a, b] \to C^0[a, b]$ è un operatore lineare completamente continuo ed $f \in C^0[a, b]$.

Per quello che segue sarà ammessa l'esistenza ed unicità della soluzione u^* della (1).

Assumendo $u_n(x)$, polinomio di grado n, come soluzione approssimata si è portati a considerare la funzione errore

$$\varepsilon_n(x) = u_n(x) + Ku_n(x) - f(x)$$

avendo scelti gli $n + 1$ coefficienti di $u_n(x)$ in modo di annullare $\varepsilon_n(x)$ in $n + 1$ punti $x_i^{(n)} \in [a, b]$, cioè in modo da verificare il sistema lineare

$$u_n(x_i^{(n)}) + Ku_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}), \qquad (i = 0, 1, \cdots, n). \tag{2}$$

Poniamo qui la *prima condizione* alla quale ci siamo riferiti nella introduzione:

α) *Il sistema lineare* (2) *ammette una soluzione unica.*

Chiamando L_n l'operatore lineare che fa corrispondere ad ogni funzione $\varphi \in C^0[a, b]$ il polinomio interpolatorio di Lagrange che coincide con $\varphi(x)$

(*) Questo lavoro è stato eseguito mentre l'Autore, nel primo trimestre del 1970, è stato ospite dell'*Istituto di Matematica Applicata* della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma e dell'*Istituto per le Applicazioni del Calcolo* del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1970.

negli $n+1$ punti $x_i^{(n)}$, si può osservare che il polinomio $u_n(x)$, che utilizza i coefficienti forniti dalla (2), è lo stesso che risolve l'equazione nell'incognita u_n:

$$L_n u_n + L_n K u_n = L_n f. \tag{3}$$

Tenendo conto che $L_n u_n = u_n$ e che le definizioni di L_n e K permettono di comporre l'operatore $L_n K : L^2[a, b] \to L^2[a, b]$ la (3) si trasforma nella

$$(I + L_n K) u_n = L_n f$$

da cui

$$u_n = (I + L_n K)^{-1} L_n f \tag{4}$$

cosicché la condizione α) è equivalente alla seguente:

α') *L'operatore* $(I + L_n K)$ *ammette l'inverso* (1).

Applicando $I + L_n K$ alla soluzione u^* e tenendo conto della (1) si ha

$$(I + L_n K) u^* = u^* + L_n K u^* = u^* + L_n (f - u^*)$$

risultando così

$$u^* = (I + L_n K)^{-1} [u^* + L_n (f - u^*)]. \tag{5}$$

Come dalla linearità e continuità di $(I + L_n K)$ seguono le stesse proprietà per il suo inverso, da (4) e (5) si avrà

$$u_n - u^* = (I + L_n K)^{-1} (L_n u^* - u^*)$$

e, indicando con $\|\cdot\|$ la norma in $L^2[a, b]$ ed essendo $(I + L_n K)^{-1}$ uniformemente limitato, sarà

$$\|u_n - u^*\| \leq M \|L_n u^* - u^*\|. \tag{6}$$

Aggiungendo adesso la *seconda* condizione

$$\|L_n u^* - u^*\| \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to \infty, \tag{β}$$

si potrà concludere che avremo la convergenza in media, per $n \to \infty$, delle soluzioni approssimate $u_n(x)$ verso la soluzione $u^*(x)$.

Nel seguito faremo riferimento spesso al seguente

LEMMA: *Se l'operatore* L_n, *applicato alle funzioni continue di* $[a, b]$ *verifica la* β), *allora risulta soddisfatta la* α').

Dim. Dalla proprietà indicata per L_n segue, per $n \to \infty$, $\|L_n K - K\| \to 0$ e, successivamente

$$\|(I + L_n K) - (I + K)\| \to 0, \qquad n \to \infty$$

(1) Si osservi che se si pensa a $I + L_n K$ operante sulla famiglia dei polinomi di grado n, i trasformati restano nella stessa famiglia.

essendo $I + K$ un operatore che, avendo ammesso l'esistenza e l'unicità di u^*, ammette l'inverso $(I + K)^{-1}$.

Da qui segue immediatamente la α') giacché se $I + K = A$ ammette inverso, allora lo ammetterà $A + \Delta A = I + L_n K$ per $\|\Delta A\| = \|L_n K - K\|$ sufficientemente piccolo. Infatti, ponendo $A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$, per $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ segue [2] l'esistenza di $(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}$ e, successivamente, quella di $(A + \Delta A)^{-1}$.

Siamo adesso in grado di dimostrare il

TEOREMA I: *Si consideri l'equazione funzionale* (1) *con* K *e* f *soddisfacenti le ipotesi già indicate. Siano i punti d'interpolazione* $x_i^{(n)}$ *utilizzati in* (2) *per la determinazione dei coefficienti degli* $u_n(x)$, *gli zeri del polinomio* $V_{n+1}(x)$ *appartenente ad un sistema di polinomi ortogonali* $\{V_n(x)\}$ *in* $[a, b]$ *relativo ad un peso* $p(x) \geq m > 0$; *allora la successione* $u_n(x)$ *converge in media, per* $n \to \infty$, *verso la soluzione* u^*.

Dim. Dalla scelta fatta per i punti $x_i^{(n)}$ e le ipotesi su $p(x)$ per un corollario [(2)] del teorema di Erdos–Turan [3 a] segue che l'operatore L_n soddisfa [(3)] l'ipotesi β). Dunque, per il precedente Lemma e tenendo conto dell'equivalenza di α) ed α') segue ovviamente la tesi.

OSSERVAZIONI – NOTE E COMPLEMENTI

a) Se si considera l'equazione funzionale (1) con $f \in C^1[a, b]$ e $K : L^1[a, b] \to C^1[a, b]$ lineare e completamente continuo, il metodo di collocazione descritto nel teorema precedente fornisce polinomi U_n tali che $\lim_{n\to\infty} U_n(x) = U^*(x)$ uniformemente in $[a, b]$.

Infatti, tenendo conto che per $\varphi \in C^1[a, b]$ non soltanto si verifica la β), ma addirittura si ha [3 — *b*]

$$\lim_{n\to\infty} L_n \varphi = \varphi \qquad \text{uniformemente in } [a, b], \tag{7}$$

restando validi sia il lemma che le altre affermazioni (purché si adegui il simbolo della norma agli spazi ora considerati) di (6), (7), segue l'asserto.

b) Nelle ipotesi della osservazione *a*) se si adoperano come punti d'interpolazione, punti equidistanti $x_i^{(n)} = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \cdots, n$ il risultato resta valido aggiungendo ipotesi molto esigenti per la soluzione U^*. Infatti, la (7) è soddisfatta [4] per quelle $\varphi \in C^\infty[a, b]$, con $\left|\frac{d^n\varphi}{dx^n}\right| \leq H_n$ tali che $\lim_{n\to\infty} H_n \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{b-a}{e}\right)^n = 0$.

(2) Il teorema a cui ci riferiamo permette di assicurare che il processo d'interpolazione fornisce polinomi *convergenti in media*, verso le funzioni continue, *rispetto ad una funzione peso* sulla quale non si introduce l'ipotesi restrittiva $p(x) \geq m > 0$. Per fare a meno di questa restrizione nella dimostrazione del Lemma si dovrebbero avere altri dati su K, come accade ad esempio nel caso degli operatori differenziali che si studiano alla fine di questa nota.

(3) La continuità di u^* segue dalle ipotesi fatte su K ed f.

c) I punti equidistanti si possono anche utilizzare con profitto adoperando come funzioni approssimanti polinomi trigonometrici di ordine n [4]. In questo caso L_n sarebbe l'operatore che fa corrispondere, ad ogni funzione $\varphi(x)$ continua, il polinomio trigonometrico di ordine n che coincide con la $\varphi(x)$ nei $2n+1$ punti $x_i^{(n)} = a + \frac{i}{2n+1} \frac{2\pi}{b-a}$, $(i = 0, 1, \cdots, 2n)$. La (7) risulta in questo caso soddisfatta [3 — *c*] per quelle $\varphi(x)$ continue di periodo $b - a$, che verificano la condizione di Dini–Lipschitz $\lim_{\delta \to 0} w(\delta) \log \delta = 0$, $[w(\delta) = \max_{|x'-x''| \leq \delta} |\varphi(x') - \varphi(x'')|]$. Esaminiamo infine l'applicazione del metodo di collocazione alle equazioni differenziali lineari.

Sia l'operatore differenziale lineare di ordine s

$$\mathfrak{L}[y] = \sum_{k=0}^{s} a_k(x)\, y^{(k)} \quad , \quad a_0(x) \equiv 1 \quad , \quad a_k(x) \in C^0[a, b] \, , \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Considereremo nell'intervallo $[a, b]$ l'equazione non omogenea

$$\text{A)} \qquad \mathfrak{L}[y] = f(x) \quad , \quad f(x) \in C^0[a, b]$$

con s condizioni omogenee (A') al contorno, ammettendo l'esistenza ed unicità della soluzione del problema A), A'). Se si può costruire una successione di polinomi $\{\varphi_h(x)\}$ soddisfacenti le condizioni A') con grado $\varphi_h = s + h$, considereremo come soluzioni approssimate del problema i polinomi y_n, di grado $n + h$, ottenuti combinando linearmente i φ_h:

$$y_n = \sum_{h=0}^{n} C_h^{(n)} \varphi_h(x) \, .$$

I coefficienti $C_h^{(n)}$ si ottengono tramite il sistema lineare

$$\sum_{k=0}^{s} a_k(x_i^{(n)})\, y_n^{(k)}(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}) \, , \qquad i = 0, 1, \cdots, n \tag{8}$$

essendo $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ gli $n+1$ zeri del polinomio $V_{n+1}(x)$ appartenente ad un sistema di polinomi ortogonali in $[a, b]$, $\{V_n(x)\}$ relativo ad un peso $p(x) \geq m > 0$.

Ponendo la soluzione della equazione differenziale $y^{(s)} = \psi(x)$ con le condizioni A') sotto la forma $y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \psi(\xi)\, d\xi$ si avrà per le y_n:

$$y_n(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, y_n^{(s)}(\xi)\, d\xi$$

(4) La medesima questione si presenta nella costruzione di formule di quadrature esatte per polinomi trigonometrici (vedi per esempio [5]).

e, più generalmente,

$$y_n^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k} y_n^{(s)}(\xi)\, d\xi\,, \qquad (k = 0, 1, \cdots, s-1).$$

Sostituendo in (8) si ha

$$y_n^{(s)}(x_i^{(n)}) + \sum_{k=0}^{s-1} \int_a^b a_k(x_i^{(n)}) \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x_i^{(n)}, \xi)\, y_n^{(s)}(\xi)\, d\xi = f(x_i^{(n)}), \qquad (i = 0, 1, \cdots n).$$

Se si denomina K l'operatore integrale di nucleo $\tilde{K}(x,\xi) = \sum_{k=0}^{s-1} a_k(x) \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)$ e si tiene conto del significato di L_n, la precedente equazione si trasforma nella

$$L_n y_n^{(s)} + L_n K y_n^{(s)} = L_n f \tag{9}$$

che, essendo $L_n y_n^{(s)} = y_n^{(s)}$ può anche scriversi

$$y_n^{(s)} + L_n K y_n^{(s)} = L_n f\,; \tag{9'}$$

in pari tempo il problema A) A′) può essere presentato sotto la forma

$$y^{(s)} + K y^{(s)} = f\,.$$

Essendo soddisfatte le ipotesi del Lemma già dimostrato per n abbastanza grande, si avrà soluzione unica per il sistema (8) ed, inoltre,

$$\int_a^b [y_n^{(s)}(x) - y^{(s)}(x)]^2\, dx \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Si ottiene così, per la soluzione y e per le sue prime $s-1$ derivate:

$$|y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(x)| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi) \right| |y^{(s)}(\xi) - y_n^{(s)}(\xi)|\, d\xi \leq$$

$$\leq \left[\int_a^b \left| \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi) \right|^2 d\xi \right]^{1/2} \left[\int_a^b |y^{(s)}(\xi) - y_n^{(s)}(\xi)|^2\, d\xi \right]^{1/2}$$

cioè, *la convergenza uniforme dei polinomi approssimati* (*e delle loro prime* $s-1$ *derivate*) *verso la soluzione del problema* (*e delle sue prime* $s-1$ *derivate*).

Rientrano in questo risultato gli $y_n(x)$ calcolati con gli zeri di polinomi di Tchebycheff, confermando così congetture formulate in questo senso [5].

Si osservi, infine, che essendo nota in questo caso la natura del nucleo di K, l'ipotesi $p(x) \geq m > 0$ può sostituirsi per la meno restrittiva $\int_a^b \frac{dx}{p(x)} < +\infty$, $p(x) \geq 0$ dovendosi allora modificare i risultati ottenuti soltanto per quanto riguarda la convergenza delle derivate $y_n^{(s)}$, giacché adesso questa sussiste in media *col peso* $p(x)$, restando immutate tutte le affermazioni concernenti la funzione e le sue prime $s - 1$ derivate.

Si possono così includere come punti di interpolazione validi per la convergenza gli zeri dei polinomi di Jacobi $[p(x) = (a - x)^{\alpha} (- b + x)^{\beta}]$, con $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$

BIBLIOGRAFIA

[1] COLLATZ L., *The numerical treatment of differential equations*. 3ª ed. Springer 1959, pp. 28–29–32–181–483.

[2] COLLATZ L., *Functional Analysis and numerical mathematics*. Academic Press, 1966, p. 92.

[3] NATANSON I. P., *Constructive function theory*, Tome 3, Fredone Urgar, N. Y. 1965 *a* – p. 56; *b* – p. 54; *c* – p. 51.

[4] ROFMAN E., *Osservazioni sulla convergenza di un metodo d'integrazione per punti di equazioni differenziali*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », Serie VIII, vol. XXXVII, fasc. 3–4 (1964).

[5] ROSATI F., *Problemi di Gauss e Tchebychef relativi a formule di quadratura esatte per polinomi trigonometrici*. « Le Matematiche », vol. XXIII, fasc. 1 (1968).

[6] FOX L. e PARKER I. B., *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford, University Press, 1968, p. 143.