Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Solutions presque périodiques d'une équation et d'une inéquation parabolique avec terme de retard non linéaire. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.3-4, p. 175–179.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_3-4_175_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1970 (Settembre–Ottobre)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *Solutions presque périodiques d'une équation et d'une inéquation parabolique avec terme de retard non linéaire.* Nota III di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostra il Teorema II enunciato nella Nota I).

Pour démontrer le Théorème II nous procédons par pénalisation.

Le procédé utilisé dans cet paragraphe est le même, que l'A. a utilisé dans (1).

Soit $J : V \to V^*$ l'application de dualité telle que

$$\langle Ju , u\rangle = \| u \|^2$$

Indiquons par $P_{\mathbf{K}}\, u$ la projection de u sur $\mathbf{K}$; nous écrivons

$$\beta u = J\,(u - P_{\mathbf{K}}\, u)$$

Considérons l'équation

$$u'(t) + Au(t) + \psi(|u(t-\tau)|)\,u(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u(t)) = f(t). \tag{1.1}$$

Pour le Théorème I nous pouvons affirmer qu'il y a au moins une solution $u_\varepsilon(t)$ de (1.1) telle que

$$|u_\varepsilon(t)| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} \tag{1.2}$$

$$\int_0^1 \| u_\varepsilon(t+\eta)\|^2\, d\eta \leq c_1 \tag{1.3}$$

(*) Istituto matematico del Politecnico di Milano – Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1970.

(1.4) $$\forall\sigma \in \mathbf{R}$$

$$| u_\varepsilon (t + \sigma) - u_\varepsilon (t) | \leq q\mathrm{M}(\sigma)$$

$$\int_0^1 \| u_\varepsilon (t + \sigma + \eta) - u_\varepsilon (t + \eta) \|^2 \, d\eta \leq \varphi(\mathrm{M}(\sigma)).$$

De (1.2) on déduit qu'on peut exstraire de $\{u_\varepsilon(t)\}$ une sous–suite, que nous indiquons encore par $\{u_\varepsilon(t)\}$, telle que

(1.5) $$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{**} u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}\,;\mathrm{H}).$$

De (1.3) on a, qu'on peut supposer, sans perdre de generalité

(1.6) $$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{**} u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad \mathrm{S}^2(\mathrm{V}).$$

De (1.4) (1.5) (1.6) on peut affirmer que $u(t)$ est presque périodique dans H et S^2 – presque périodique dans V.

Démontrons que $u(t) \in \mathbf{K}$ p.p.

Soient t_1 et t_2 fixés sur l'axe réel, $t_1 < t_2$.

On a

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\rangle \, dt \leq \frac{1}{2}\{| u_\varepsilon(t_2)|^2 + | u_\varepsilon(t_1)|^2\}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathrm{A}u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\rangle \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \psi(| u_\varepsilon(t-\tau)|) \, | u_\varepsilon(t)|^2 \, dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), u_\varepsilon(t)\rangle \, dt.$$

On a alors

(1.7) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\rangle \, dt = 0\,;$$

donc

(1.8) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} \| u_\varepsilon(t) - \mathrm{P}_{\mathbf{K}}\, u_\varepsilon(t)\|^2 \, dt = 0$$

De (1.8) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \beta u_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2(t_1, t_2\,; \mathrm{V}^*)$$

De (1.7) et (1.9) on a, (2),

$$\beta u(t) = 0 \qquad \text{p.p. dans} \quad (t_1, t_2)\,;$$

donc

$$u(t) \in \mathbf{K} \qquad \text{p.p. dans} \quad (t_1, t_2).$$

Pour la generalité de t_1 et t_2 on a alors la thèse.

Observons que de (1.3) on déduit que $\{u_\varepsilon(t)\}$ est bornée dans $L^2(t_1, t_2; V)$; de (1.4) on déduit en outre que $\{u_\varepsilon(t)\}$ sont equicontinues dans H.

Nous pouvons alors, [1], supposer sans perdre de generalité

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad L^\infty(t_1, t_2; H) \tag{1.10}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{*} u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad L^2(t_1, t_2; H). \tag{1.11}$$

Soit maintenant

$$v(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in L^2(t_1, t_2; V), v'(t) \in L^2(t_1, t_2; V^*)$$
$$v(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p. dans } (t_1, t_2)\}$$

On a

$$\beta v(t) = 0 \quad \text{p.p. dans} \quad (t_1, t_2)$$

dont

$$\langle \beta u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle \le \langle \beta v(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle = 0$$

On a

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle + \langle A u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle - \tag{1.12}$$
$$- \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle\}\, dt \ge \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) - u'_\varepsilon(t), v(t) - u(t)\rangle\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - v(t)\rangle\, dt \ge \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) - u'_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle\, dt \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\{|v(t_2) - u_\varepsilon(t_2)|^2 - |v(t_1) - u_\varepsilon(t_1)|^2\}.$$

De (1.11) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t), v(t) - u(t)\rangle\, dt \tag{1.13}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v(t) - u(t)\rangle\, dt. \tag{1.14}$$

De (1.10) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\psi(|u_\varepsilon(t-\tau)|)\langle u_\varepsilon(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\rangle\, dt = \tag{1.15}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\psi(|u(t-\tau)|)\langle u(t), v(t)-u(t)\rangle\, dt$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|v(t_2)-u_\varepsilon(t_2)|^2 = |v(t_2)-u(t_2)|^2 \tag{1.16}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|v(t_1)-u_\varepsilon(t_1)|^2 = |v(t_1)-u(t_1)|^2. \tag{1.17}$$

Démontrons maintenant que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-v(t)\rangle\, dt \geq \int_{t_1}^{t_2}\langle Au(t), u(t)-v(t)\rangle\, dt.$$

Observons que, [1], supposé $u(t_1)\in V$, la fonction $u(t)$ peut être approché dans (t_1, t_2) par une suite $\{u_n(t)\}$ telle que

$$u_n(t)\in \mathbf{K} \quad \text{p.p. dans } (t_1, t_2) \tag{1.18}$$

$$u_n(t_1) = u(t_1) \tag{1.19}$$

$$u_n'(t)\in L^2(t_1, t_2; H) \tag{1.20}$$

$$u_n(t)\in L^2(t_1, t_2; V) \tag{1.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{in } L^\infty(t_1, t_2; H) \tag{1.22}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{in } L^2(t_1, t_2; V) \tag{1.23}$$

$$\max\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\langle u_n'(t), u_n(t)-u(t)\rangle\, dt \leq 0. \tag{1.24}$$

De (1.23) on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-u_n(t)\rangle\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-u(t)\rangle\, dt$$

uniformement pour ε.

On a alors

$$\max\lim_{n\to\infty}\ \max\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-u_n(t)\rangle\, dt =$$

$$= \max\lim_{\varepsilon\to 0}\ \max\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-u_n(t)\rangle\, dt =$$

$$= \max\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-u(t)\rangle\, dt.$$

On a alors

$$(1.25)\qquad \max\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-u(t)\rangle\,dt =$$

$$= \max\lim_{n\to\infty}\ \max\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-u_n(t)\rangle\,dt \le$$

$$\le \max\lim_{n\to\infty}\ \max\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\{\langle u_n'(t), u_n(t)-u_\varepsilon(t)\rangle +$$

$$+\psi(|u_\varepsilon(t-\tau)|)\langle u_\varepsilon(t), u_n(t)-u_\varepsilon(t)\rangle - \langle f(t), u_n(t)-u_\varepsilon(t)\rangle\}\,dt =$$

$$= \max\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\{\langle u_n'(t), u_n(t)-u(t)\rangle +$$

$$+\psi(|u(t-\tau)|)\langle u(t), u_n(t)-u(t)\rangle - \langle f(t), u_n(t)-u(t)\rangle\}\,dt \le 0.$$

Considérons l'opérateur $A\,u(t) = A(u(t))$; cet opérateur est monotone, borné, hémicontinu de $L^2(t_1, t_2; V)$ dans $L^2(t_1, t_2; V^*)$; alors, [2], on a

$$(1.26)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\langle Au(t), u(t)-v(t)\rangle\,dt \le \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)-v(t)\rangle\,dt.$$

De (1.13) (1.14) (1.15) (1.16) (1.17) (1.26) on a

$$\int_{t_1}^{t_2}\{\langle v'(t), v(t)-u(t)\rangle + \langle Au(t), v(t)-u(t)\rangle +$$

$$+\psi(|u(t-\tau)|)\langle u(t), v(t)-u(t)\rangle - \langle f(t), v(t)-u(t)\rangle\}\,dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\{|v(t_2)-u(t_2)|^2 - |v(t_1)-u(t_1)|^2\}.$$

La thèse est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIROLI M., *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution* – à paraitre. « Annali Mat. ».

[2] BRÉZIS H., *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces en dualité*, « Ann. Inst. Fourier », *18*, 115–175 (1968).