

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

ERASMO RECAMI

**Descrizione spazio-temporale di processi elementari,  
Tachioni e Causalità**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 49 (1970), n.1-2, p. 77-91.*  
Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1970\\_8\\_49\\_1-2\\_77\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_1-2_77_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## SEZIONE II

(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

**Fisica.** — *Descrizione spazio-temporale di processi elementari, Tachioni e Causalità.* Nota di ERASMO RECAMI, presentata (\*) dal Corrisp. P. CALDIROLA.

SUMMARY. — In this preliminary article, a possible spacetime description of elementary interactions is sketched, by using wave-packets. This description suggests the assumption of an operator for the chronotopical variables, i.e. also for the observable time. In particular, the position operator is extended for "tachyons" too. In the previous framework, an elementary formulation of macro-causality may be forwarded, and the new "anticausality" principle—proposed for processes with antiparticle exchanges—may be inserted. The ideal experiment (suggested to test if really in some processes the temporal order of "causes" and "effects" can appear reversed) is discussed also on an experimental basis.

### I. INTRODUZIONE

Nello studio e nella classificazione dei meccanismi di reazione, uno dei dati importanti è la durata dei processi. D'altra parte gli usuali metodi della teoria quantistica delle collisioni relativistiche — ricorrenti a onde monocromatiche — non considerano l'evoluzione temporale, e appaiono piuttosto artificiosi.

Accenneremo pertanto a una possibile descrizione spazio-temporale dei processi elementari, mediante l'uso di pacchetti d'onde. Questo ci suggerirà l'introduzione di un operatore per le variabili cronotopiche, e quindi anche per l'osservabile tempo.

L'operatore posizione, in particolare, verrà esteso anche per i tachioni, supposti particelle create e viaggianti sempre a velocità superiori a quella della luce [1].

Nel precedente contesto, si potrà fornire una particolare formulazione della causalità, nonché accennare alla « anticausalità », suggerita per i processi con scambio di antiparticelle. Ricordato che, per aversi una correlazione causale, non è logicamente necessaria la usuale successione cronologica di « cause » ed « effetti », si proporrà un esperimento « ideale » per verificare se in alcuni processi possa risultare invertito tale ordine temporale.

Si cercherà di tenere presenti, oltre alle usuali particelle con  $v < c$  (*bradioni*)<sup>(1)</sup> e a quelle con  $v = c$  (*luxoni*), anche la possibile esistenza di particelle aventi sempre  $v > c$  (*tachioni*): perché tale inquadratura può permettere una visuale più ampia su varie questioni, pure a prescindere dalla effettiva scoperta sperimentale dei tachioni stessi.

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1970.

(1) Si propone il termine « Bradyons », al posto del « Tardyons » suggerito da Sudarshan.

## 2. SCATTERING DI UN PACCHETTO D'ONDE RELATIVISTICO

Si considerino [2] particelle relativistiche (trascurando lo spin). Contrariamente a una certa opinione, le *particelle* di Klein-Gordon (K — G) *libere* possono localizzarsi con ogni desiderato grado di accuratezza anche ricorrendo ai soli stati ad energia positiva [3], purché si usino appunto pacchetti d'onde a quadrato sommabile (invece delle autofunzioni del solito operatore posizione). Per semplicità, iniziamo col considerare un pacchetto relativistico, molto prima e molto dopo l'urto con un centro diffusore; tenendo presenti, però, le influenze apportate dagli apparati sperimentali di preparazione (ad esempio il collimatore) e di rivelazione (ad esempio la « finestra » del contatore). La tecnica usata è quella delle trasformazioni di Fourier. Per esempio, consideriamo un pacchetto iniziale libero Lorentz-invariante:

$$(1) \quad \psi^{(in)}(x) = \int_{\dagger} \frac{d\mathbf{p}}{2p_0} g(\mathbf{p}) \exp [i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - p_0 t)]$$

e chiamiamo  $z$  la direzione entrante, che va dal centro del collimatore ( $z = 0$ ) al centro diffusore. Se i parametri « efficaci » di lavoro di un eventuale rivelatore del fascio iniziale sono — come d'uso — molto maggiori delle estensioni cronotopiche del pacchetto, si trova [2] per il *time-shift* medio causato dall'apparato sperimentale di preparazione:

$$(2) \quad \langle \Delta t \rangle_{(in)} = \int_{\dagger} \frac{d\mathbf{p}}{2p_0} |g(\mathbf{p})|^2 \frac{\partial}{\partial p_0} [\arg g(\mathbf{p})],$$

e analogamente per il corrispondente *space-shift* medio (con intervento però della  $\partial/\partial \mathbf{p}$ ). Tralasciamo per ora lo « spreading » del pacchetto. Molto dopo l'urto (con un centro diffusore idealmente *fermo* nel laboratorio), ossia presso il rivelatore, per ogni tipo di particelle finali (libere) analizzate si potrà scrivere:

$$(3) \quad \psi^{(sc)}(\tilde{x}) \simeq \int_{\dagger} \frac{d\mathbf{p}}{2p_0} \int_{\dagger} \frac{d\mathbf{q}}{2q_0} \tilde{g}(\mathbf{q}) f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \exp [i\mathbf{q} \cdot \tilde{x}],$$

dove  $\tilde{g}(\mathbf{q})$  include le risoluzioni angolare ed energetica del rivelatore ed  $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  è l'ampiezza di transizione da *onde piane* iniziali di momento  $\mathbf{p}$  a *onde piane* finali di momento  $\mathbf{q}$ . Ora l'asse  $\tilde{z}$  va dal centro di collisione ( $\tilde{z} = 0$ ) al centro della « detector window ». L'uso di pacchetti finali di onde piane è giustificato dal fatto che siamo interessati solo alle onde che raggiungono la apertura del rivelatore. Tralasciamo qui per sinteticità di trattare della sezione d'urto, nonché degli space-time shifts causati dall'apparato rivelatore (cfr. Bibl. [2]); diciamo solo che *l'intero time-shift* medio (ritardo o anticipo)

causato e dall'interazione e dagli apparati sperimentali iniziali e finali sarà:

$$(4) \quad \langle \Delta t \rangle = \frac{\operatorname{Re} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\dot{p}_0} \int \frac{d\mathbf{p}'}{2\dot{p}'_0} \int \frac{d\mathbf{q}}{2q_0} \left\{ -\frac{i}{2} F^* \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial q_0} F' \right\}}{\operatorname{Re} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\dot{p}_0} \int \frac{d\mathbf{p}'}{2\dot{p}'_0} \int \frac{d\mathbf{q}}{2q_0} F^* F'} \equiv \left\langle -\frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial q_0} \right\rangle_{\Phi},$$

dove:  $F \equiv F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ;  $F' \equiv F(\mathbf{p}', \mathbf{q})$ ;  $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv g(\mathbf{p}) \bar{g}(\mathbf{q}) f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Si noti che nella (4) interviene un «radianza», l'operatore di derivazione  $\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial q_0}$ . Analogamente, il corrispondente *intero space-shift* medio (trasversale) sarà:

$$(4 \text{ bis}) \quad \langle \Delta \mathbf{x} \rangle = \left\langle \frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle_{\Phi}.$$

Nelle (4) e (4 bis), per definizione:  $\Phi' \equiv \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{2\dot{p}'_0} F'$ .

Diamo il time-shift prodotto *dalla sola interazione*, nel caso particolare di scattering elastico con pacchetti iniziali larghi e tali che:

$$g(\mathbf{p}) = \sqrt{2\dot{p}_0} g(p_z) \delta(p_x) \delta(p_y); \quad \bar{g}(\mathbf{q}) = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \sqrt{4\dot{p}_0 q_0} \delta(|\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|) \bar{g}(\Omega_{\mathbf{q}});$$

$$(5) \quad \langle \Delta t \rangle_{(\text{int})} = \left\langle \frac{\partial \arg f(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \dot{p}_0} \right\rangle,$$

e analogamente per lo space-shift trasversale prodotto dall'interazione.

In questo paragrafo si è tra l'altro formalmente rilevato il fatto che le osservabili fisiche dipendono – come ben noto – non solo dalla dinamica dell'interazione, bensì pure dalle condizioni sperimentali iniziali e finali [2]. Un'altro punto importante che si potrebbe sottolineare è il ruolo dello *spreading* sui pacchetti scatterati: contrariamente alle usuali assunzioni, nel caso relativistico lo *spreading* può ritenersi spesso praticamente quasi infinito. Ciononostante (nelle ipotesi sopradette, in cui le dimensioni spazio-temporali su cui opera il rivelatore sono molto maggiori delle corrispondenti caratteristiche dei pacchetti), lo *spreading* non influenza le osservabili, come può constatarsi dalle loro stesse espressioni esplicite nello spazio degli impulsi e può desumersi dalla conservazione della probabilità totale. Ad esempio, nel caso della collisione di due nuclei, con un momento entrante nel lab. di 1 GeV/c, una risoluzione energetica  $\Delta E = 10^{-2}$  GeV, e una distanza di 10 cm tra bersaglio e rivelatore, si trova nel sistema del c.m. per il «parametro di spreading» [4] il valore:  $e \approx 1.7 \times 10^{10}$ . Ciononostante, ripetiamo, gli *spreading* e *blending* dei pacchetti finali non hanno conseguenze rilevabili nelle *odierne* situazioni sperimentali (a causa della conservazione della probabilità).

Già a questo stadio, il calcolo della durata di un processo può essere ad esempio utile nell'analisi dei «picchi», per distinguere la formazione di una vera risonanza da un effetto cinematico: nel caso «risonante» ci si aspetta un picco anche nella durata dell'interazione elastica. Nel caso banale di scatte-

ring elastico in cui tutti i canali anelastici siano chiusi e la singola onda parziale  $s$  domini tutta la reazione, si ritrova semplicemente:

$$(6) \quad \langle \Delta t \rangle_{(int)} \approx \hbar \frac{\partial \delta}{\partial E},$$

dove  $\delta$  è lo sfasamento. Ad esempio, per lo scattering elastico  $\pi^+ p$  in onda  $s$  e con isospin totale  $T = 3/2$ , in prossimità della energia cinetica (nel lab.) dei pioni entranti  $E_\pi \approx 195$  MeV, corrispondente alla risonanza  $\Delta_{33}^{++}$ , si trova per i time-shift nel c.m.:

lab. $E_\pi$ (MeV)	c.m. $\langle \Delta t \rangle_{(int.)}$ ( $10^{-23}$ s)
$\sim 158$	$\sim -5.1$
168	+ 2.8
173	+ 1.3
188	+ 4.0
212	- 4.0

Purtroppo i dati sui phase-shift sono troppo scarsi e imprecisi per una indagine più dettagliata; non è possibile fornire neppure le deviazioni standard dei valori in tabella.

### 3. SCATTERING DI DUE PACCHETTI D'ONDE CON UN NUMERO ARBITRARIO DI PACCHETTI FINALI - MACROCAUSALITÀ

Iniziamo col considerare il caso non relativistico [5]. Tendendo sempre a una descrizione il più possibile fisica, ricorremo all'operatore di evoluzione  $U$  piuttosto che alla matrice  $S$ , in accordo con Hammer e Weber [6]. Nello stadio iniziale, come noto, il sistema del proiettile  $a$  e del bersaglio  $b$  potrà descriversi con:

$$(7) \quad \begin{aligned} \psi_i(t_0) &\equiv \varphi_a(\mathbf{r}_a, \xi_a, t_0) \cdot \varphi_b(\mathbf{r}_b, \xi_b, t_0) = \\ &= |n_a, n_b\rangle \int d\mathbf{k}_a \int d\mathbf{k}_b g_a(\mathbf{k}_a) g_b(\mathbf{k}_b) \exp[-iEt_0/\hbar] |\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b\rangle, \end{aligned}$$

dove  $t_0$  può essere l'istante della preparazione del pacchetto proiettile,  $|\mathbf{k}_a\rangle \equiv (2\pi)^{-3/2} \exp[i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}_a]$ , ed  $|n_a\rangle, |n_b\rangle$  sono le funzioni (ortonormalizzate) descrittive gli *stati interni* di  $a, b$  (essendo  $\xi_a, \xi_b$  le coordinate interne).

In ogni istante  $t$  durante l'interazione si avrà al solito

$$\psi(t) = \exp[-iH(t-t_0)] \psi_i(t_0)$$

essendo  $H$  l'hamiltoniana totale. Per fissare le idee, possiamo scegliere un particolare canale  $f$ , relativo a un certo set di  $\nu$  nuove particelle finali (con certi stati interni); la funzione d'onda corrispondente a questo sistema finale può essere facilmente espressa [5] introducendo appunto l'operatore  $U_{fi}(t, t_0)$ , dopo di aver eliminato il moto del centro di massa. Naturalmente

$$(8) \quad \lim_{t, -t_0 \rightarrow \infty} \langle f | U(t, t_0) | i \rangle = \langle f | S | i \rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi}$$

dove  $T_{fi}$  è la matrice di transizione.

Definiamo ora istante d'inizio dell'interazione quel momento  $t_{ab}^i$  in cui i centri dei pacchetti collidenti vengono a distare quanto il diametro della regione del potenziale (relativo), cioè quando:

$$(9) \quad \langle \mathbf{r}_a \rangle_i - \langle \mathbf{r}_b \rangle_i = R_{ab},$$

essendo:

$$(9') \quad \langle \mathbf{r} \rangle_i \equiv \frac{\langle \varphi | \mathbf{r} | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} = \frac{\int d\mathbf{k} |g|^2 \left\{ v_i - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \arg g \right\}}{\int d\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2}.$$

Notiamo esplicitamente anche qui che una maggiore simmetria si ottiene introducendo (invece dell'operatore lineare di posizione  $i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ ) l'operatore-posizione « bilineare »:

$$(10) \quad \frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{k}}.$$

Questo operatore hermitiano ammette naturalmente gli stessi autovalori  $\mathbf{r}$ , ma coppie di autofunzioni:  $\exp[\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$ .

Chiamando poi  $t_{ab}^{(coll.)}$  l'istante in cui i due centri dei pacchetti coinciderebbero in assenza di interazione, è facile trovare [5] che:

$$(11) \quad [t_{ab}^{(coll.)}]_i = \frac{1}{(v_{z_{ab}})_i} \left\langle \frac{\partial \arg g_a}{\partial k_{z_a}} - \frac{\partial \arg g_b}{\partial k_{z_b}} \right\rangle_i$$

essendo:

$$\left\langle \frac{\partial \arg g}{\partial k_z} \right\rangle_i \equiv \frac{\int d\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2 \frac{\partial \arg g(\mathbf{k})}{\partial k_z}}{\int d\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2}.$$

Ma, per semplicità, riduciamoci al caso di « funzioni peso » sufficientemente « strette », in cui i valori  $k_{z_a}$  e  $k_{z_b}$  possono essere considerati quasi costanti negli integrali. In questa approssimazione « quasi classica » (che può dirsi « indipendente dalla forma dei pacchetti »), si avrebbe:

$$(12) \quad t_{ab}^i \approx -\frac{R_{ab}}{v_{z_{ab}}} + [t_{ab}^{(coll.)}]_i,$$

dove ora:

$$[t_{ab}^{(\text{coll.})}]_i \approx \hbar \left\langle \frac{\partial \arg g_a g_b}{\partial \varepsilon_{ab}} \right\rangle_i ; \quad \varepsilon_{ab} \equiv \frac{m_a m_b}{2(m_a + m_b)} (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)^2,$$

essendo  $\varepsilon_{ab}$ , ovviamente, l'energia cinetica del moto relativo. Tale risultato è lo stesso che si potrebbe conseguire col metodo della « fase stazionaria ».

Anche il momento di emissione  $t_{cd}^f$  di una particolare coppia  $c, d$  di particelle finali può definirsi implicitamente attraverso l'equazione non lineare

$$(13) \quad t_{cd}^f = \frac{R_{cd}}{\langle v_{\tilde{z}_{cd}} \rangle_f} + [t_{cd}^{(em)}]_f,$$

essendo  $t_{cd}^{(em)}$  - al solito - l'istante in cui i centri dei pacchetti finali  $c, d$  (in assenza di interazione reciproca) potrebbero pensarsi come uscenti dallo stesso punto. Nel caso limite  $t^f, -t^i \rightarrow \infty$ , l'istante in cui i centri dei pacchetti  $c$  e  $d$  raggiungono una distanza relativa  $\tilde{z}_{cd} \gg R_{cd}$  potrà invece esprimersi mediante una equazione lineare [5]. Sempre in questo caso limite, e in più nell'approssimazione che abbiamo detto « quasi classica », si ottiene:

$$(14) \quad t_{cd}^f \approx \frac{\tilde{z}_{cd}}{v_{\tilde{z}_{cd}}} + [t_{ab}^{(\text{coll.})}]_i + \hbar \frac{\partial \arg T_{fi}}{\partial \varepsilon_{ab}}.$$

A questo punto è naturale interpretare la differenza  $t_{cd}^f - t_{ab}^i$  come *durata del processo parziale* relativo alla creazione della coppia  $c, d$  allontanantesi nella direzione relativa  $\tilde{z}_{cd}$ . In generale, dovremmo a rigore scrivere:

$$(15) \quad t_{cd}^f - t_{ab}^i = \frac{R_{cd}}{|\langle v_{\tilde{z}_{cd}} \rangle_f|} + \frac{R_{ab}}{|\langle v_{z_{ab}} \rangle_i|} + \\ + \frac{\hbar}{\langle v_{\tilde{z}_{cd}} \rangle_f} \left\langle v_{\tilde{z}_{cd}} \frac{\partial \arg \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{cd}} \right\rangle_f - \frac{\hbar}{\langle v_{z_{ab}} \rangle_i} \left\langle v_{z_{ab}} \frac{\partial \arg g_a g_b}{\partial \varepsilon_{ab}} \right\rangle_i,$$

dove:

$$\mathcal{F} \equiv g_{\det}(k_1, k_2, \dots, k_\nu) \cdot \int d\mathbf{k}_{ab} g_a(\mathbf{k}_a) g_b(\mathbf{k}_b) \langle f | U(t_{cd}^f, t_{ab}^i) | i \rangle$$

con ovvio significato dei simboli [5].

Al limite, però, per  $\tilde{z}_{cd}, -z_{ab} \rightarrow \infty$  e nell'approssimazione « quasi classica », più semplicemente si può scrivere:

$$(16) \quad t_{cd}(\tilde{z}_{cd}) - t_{ab}(z_{ab}) \approx \left| \frac{\tilde{z}_{cd}}{v_{\tilde{z}_{cd}}} \right| + \left| \frac{z_{ab}}{v_{z_{ab}}} \right| + \hbar \frac{\partial \arg T_{fi}}{\partial \varepsilon_{cd}},$$

da cui risulta che il termine

$$(16') \quad \hbar \frac{\partial \arg T_{fi}}{\partial \varepsilon_{cd}}$$

è proprio il *time-shift* (*delay* o *advance*), dovuto alle interazioni, per la nostra reazione parziale considerata.

Analogamente, nella medesima approssimazione, per ogni pacchetto finale  $c$ , la quantità

$$(17) \quad \hbar \frac{\partial \arg T_{fi}}{\partial \varepsilon_c}$$

potrà intendersi come esprimere il *time-shift della particella c*. I nostri time-shifts (16') e (17) valgono anche per potenziali a raggio infinito (purché tendenti a zero più rapidamente di  $r^{-1}$ ).

\* \* \*

Per l'estensione al caso di particelle (a spin zero) *relativistiche*, è sufficiente – ad esempio – porsi nel c.m. globale e considerare pacchetti liberi della solita forma:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\dot{p}_0} g(\mathbf{p}) \exp [i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \dot{p}_0 t)]$$

con le solite definizioni per la densità di probabilità  $\rho$  e il flusso  $\mathbf{J}$ :

$$(18) \quad m_0 \rho \equiv \frac{i}{2} \left( \varphi^* \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} \varphi \right) \quad ; \quad m_0 \mathbf{J} \equiv -\frac{i}{2} \left( \varphi^* \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{r}} \varphi \right).$$

A questo punto le formule del presente paragrafo potranno generalizzarsi semplicemente con le sostituzioni:

$$\varepsilon_i \rightarrow \dot{p}_{0i} \quad ; \quad d\mathbf{k}_i \rightarrow \frac{d\mathbf{p}_i}{2\dot{p}_{0i}} \quad ; \quad \mathbf{k}_{ij} \rightarrow \mathbf{p}_{ij} = \frac{\bar{p}_{0j} \mathbf{p}_i - \bar{p}_{0i} \mathbf{p}_j}{\bar{p}_{0i} + \bar{p}_{0j}}$$

dove  $\dot{p}_0 = (\bar{\mathbf{p}}^2 + m_0^2)^{1/2}$ , essendo  $\bar{\mathbf{p}}$  il momento (medio) mediato sull'intero pacchetto.

\* \* \*

In funzione degli « effective instants » di inizio e fine della interazione, è subito ovvio esprimere il comune *principio di macrocausalità*:

$$(19) \quad t_{cd}^f - t_{ab}^i \geq 0; \quad (c \neq d = 1, \dots, \nu),$$

nel caso non relativistico; con la condizione supplementare, nel caso relativistico:

$$(20) \quad |\langle \mathbf{r}_j \rangle_f - \langle \mathbf{r}_s \rangle_i| \leq c (t_{cd}^f - t_{ab}^i); \quad (j = 1, \dots, \nu; s = a, b),$$

dove il segno  $<$  vale per i « bradioni », il segno  $=$  per i « luxoni » e il segno  $>$  per i « tachioni » [1,7].

4. CENNI SU UN OPERATORE PER LE OSSERVABILI «TEMPO» E «POSIZIONE» IN RELATIVITÀ RISTRETTA; OPERATORI NON-HERMITIANI E NON-NORMALI.  
I TACHIONI

Le presenti considerazioni sono ancora in fase di sistemazione [8, 26]. Si useranno, al solito, unità naturali e la metrica (+ — — —).

È noto che gli usuali operatori di posizione, essendo hermitiani, hanno numeri reali quali autovalori; sono cioè operatori *puntuali*.

Ma nel caso relativistico la produzione di coppie (ad es.) preclude, anche in via di principio [9], una localizzazione con precisione migliore di una lunghezza d'onda Compton ( $1/m$ ). I valori misurabili di un operatore posizione  $\hat{z}$  devono pertanto essere *regioni* dello spazio invece che punti. Ciò può ottenersi ricorrendo ad operatori non solo non hermitiani ma anche non normali, cui sembra possibile attribuire un significato fisico del tutto concreto [9, 10, 26]: nel nostro caso, i *valori medi* della parte hermitiana di  $\hat{z}$  forniranno la posizione media (puntuale), e i *valori medi* della parte antihermitiana le dimensioni della regione [8, 10, 26].

È solo per questi motivi che l'operatore di posizione per le particelle relativistiche (consideriamo sempre il caso di K-G) non è hermitiano [11]: ciononostante si può ben considerare l'operatore  $i \nabla_{\mathbf{p}}$  proprio come un operatore posizione corretto (*extended-type position*) per le particelle relativistiche a spin zero. È sufficiente spezzarlo nelle sue parti hermitiana e antihermitiana come segue:

$$(21) \quad \hat{z} \equiv i \nabla_{\mathbf{p}} = \frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}_+}{\partial \mathbf{p}},$$

dove definiamo:

$$\psi^* \frac{\overleftrightarrow{\partial}_+}{\partial \mathbf{p}} \varphi \equiv \psi^* \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} + \varphi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{p}}.$$

È ovvio che la parte hermitiana

$$(22) \quad \hat{x} \equiv \frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{p}},$$

da sola, sarà un operatore *point-type*, di tipo usuale. Infatti, come vedremo, esso *coincide* con l'operatore di Newton-Wigner (N-W) nel caso dei «bradioni» (tetraimpulsi *time-like*). Pure interessante è osservare che, a sua volta, la parte antihermitiana

$$(23) \quad \hat{y} = \frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}_+}{\partial \mathbf{p}}$$

*coincide* - sempre nel caso di momenti *time-like* - col corrispondente operatore introdotto per altra via da Kálnay e Coll. [12] per le particelle di K-G.

In modo euristico [8], si può pervenire all'operatore (22) anche ricordando che per le particelle di K-G:

$$(\psi, \mathbf{x}\varphi) \equiv i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \Psi^*(\mathbf{p}) \nabla_{\mathbf{p}} \Phi(\mathbf{p})$$

e inoltre che un operatore è hermitiano se sono reali i suoi elementi diagonali. Allora il calcolo di

$$(24) \quad \text{Re}(\varphi, \mathbf{x}\varphi) = \frac{i}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{p_0} \Phi^*(\mathbf{p}) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{p}} \Phi(\mathbf{p})$$

suggerisce subito, appunto, di adottare l'operatore hermitiano Lorentz-invariante (22),  $\frac{i}{2} \cdot \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{p}}$ , come *operatore posizione*. Nel caso delle particelle usuali si può procedere alla integrazione per parti standard [11] (trascurando un integrale di superficie, al contorno) e *verificare* che l'operatore (22) coincide con quello di N-W:

$$(25) \quad \frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{p}} \equiv i \nabla_{\mathbf{p}} - \frac{i}{2} \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 + m_0^2}, \quad (\text{per momenti-time-like}).$$

Nel caso di tetramomenti [14] *space-like* ( $p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 - m_0^2}$ ), però, il procedimento empirico seguito da N-W non può più effettuarsi [8]: integrando per parti, infatti, si avrebbero divergenze sul contorno  $\mathbf{p}^2 = m_0^2$ , e pertanto all'operatore (22), nel caso dei tachioni, non può farsi assumere [8] una forma analoga a quella di N-W. Dunque è l'operatore (22) stesso che,

nella sua forma  $\frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{p}}$ , appare essere un opportuno operatore posizione (nel senso consueto) sia per « bradioni » che per tachioni (a spin zero [8, 13]).

Tralasciando qui di trattare dell'operatore  $\hat{\mathbf{y}}$ , osserviamo come venga spontaneo assumere come operatore *cronotopico* (sia per le particelle comuni che per i tachioni) l'operatore « quadrimensionale »:

$$(26) \quad \hat{x} \equiv \frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial p}$$

In particolare (cadendo, nel caso relativistico, l'obiezione contenuta nel vecchio teorema di Pauli [14]), fissiamo l'attenzione sull'operatore per l'osservabile « tempo » (come sarebbe richiesto dalla « simmetria » relativistica tra spazio e tempo):

$$(27) \quad \hat{t} \equiv -\frac{i}{2} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial E}$$

Si verifica immediatamente che:

$$(28) \quad [\hat{t}, E] = -i,$$

e si *potrebbe* dare così una formulazione rigorosa alla correlazione d'incertezza di Heisenberg:

$$(29) \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{1}{2}.$$

D'altra parte, anche tutta la trattazione (di tipo consueto), con pacchetti d'onda, svolta nei paragrafi 2 e 3 per la descrizione spazio-temporale dei processi elementari, continuamente suggerisce (cfr. ad esempio le formule (4), (4 bis), (10), (18), ecc.) l'introduzione di un operatore hermitiano di tipo (26) per le coordinate cronotopiche. Per completare l'esame dell'operatore tempo (27), bisognerebbe anzitutto generalizzarne la forma così da attribuirgli un significato anche in corrispondenza agli eventuali valori discreti dell'energia <sup>(2)</sup>. Dal punto di vista fisico «concreto» non esistono stati con energia perfettamente definita. La suddetta «difficoltà» appare soprattutto di carattere matematico, dunque, (e ci si attenderebbe, per uno stato con energia perfettamente definita, il «valor medio» zero - o comunque finito - per l'osservabile  $\hat{t}$  e un «valor medio» infinito per il corrispondente operatore antihermitiano  $-\frac{i}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial E}$ ).

## 5. UN OPERATORE POSIZIONE PER I TACHIONI

Vogliamo qui risottolineare come l'operatore (22) *possa* costituire un «buon» operatore posizione (nel senso usuale) anche per i tachioni. *Esso anzi costituisce una estensione* matematicamente corretta (per tetraimpulsi space-like) *dell'operatore di N-W al caso dei tachioni* [8, 15]; e in particolare non è assoggettabile alle obiezioni contenute in Bibl. [16].

Riguardo ai tachioni, in generale, si rimanda ancora alle Bibl. [1], [5], [7], [8] e alle citazioni ivi riportate. Qui osserviamo solo quanto segue: si consideri la fig. 1 di Bibl. [7], in cui viene riportato il piano complesso delle «masse proprie» (o «masse a riposo») delle particelle finora note o supposte [1]. Fenomenologicamente parlando, si avrà uno spettro discreto sul semiasse reale positivo in corrispondenza alle particelle (bradioni), e un analogo spettro discreto sul semiasse reale negativo che *può* farsi corrispondere alle antiparticelle [17, 7, 5]. L'*origine* corrisponde ai luxoni (fotoni, ecc.). I punti dell'asse immaginario, come noto, corrispondono ai tachioni. Considerazioni euristiche suggeriscono, in tale schema, che il passaggio particella (in senso lato) → antiparticella equivalga alla simmetria rispetto all'asse verticale. Ma *non* ne consegue - si noti - che i tachioni («coincidendo» con gli antitachioni, come si vedrà avanti) debbano essere *neutri* [26].

Per concludere questi richiami, - premesso che la distinzione tra tachioni e antitachioni dipende dal segno della loro energia relativistica, e non dal segno della loro «massa propria» (immaginaria), - ricordiamo come il carat-

(2) Che cadono nel «gap» tra i valori positivi e i valori negativi.

tere di « particella » o « antiparticella » per tachioni e luxoni sia puramente relativa all'osservatore [19, 7]. Infatti, nello spazio dei tetraimpulsi, l'iper-superficie (ved. la fig. 2 di Bibl. [5] o [7]):

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2$$

per  $m_0^2 \leq 0$  dà un iper-iperboloide di rotazione *ad una falda* (o un iper-cono), così che una trasformazione di Lorentz propria potrà far transire da un punto corrispondente a  $E > 0$  a un punto corrispondente a  $E < 0$  (e freccia del tempo *invertita*) [19, 7, 5] <sup>(3)</sup>.

## APPENDICE

### 6. ANTIPARTICELLE E « ANTICAUSALITÀ »

Premettiamo che l'usuale successione temporale di causa-effetto non è *logicamente* necessaria perché si abbia una correlazione causale [20, 7]. Riconsideriamo ora la fig. 2 di Bibl. [5] o [7], e il fatto che la « questione » *antiparticelle* nasce insieme col doppio segno che si incontra in relatività ristretta:

$$(30) \quad E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}.$$

Nel caso di usuali momenti time-like, la (30) è un iperboloide *a due falde*, nello spazio dei momenti (proprio per questo motivo, come sarà più chiaro oltre, la netta separazione tra materia e antimateria è relativa ai soli bradioni, e collegata al fatto che una trasformazione propria di Lorentz opera spostamenti solo sulla medesima falda di iperboloide). Mentre i punti della falda superiore ( $E > 0$ ) rappresentano gli stati cinematici di una particella (libera) visti dai vari osservatori inerziali, i punti della falda inferiore ( $E < 0$ ) corrispondono agli analoghi stati della « antiparticella » relativa.

Infatti, come noto [19], a un cambiamento di segno della energia (nello spazio degli impulsi), corrisponde anche un *cambiamento di segno* per lo scorrere del tempo (nello spazio delle configurazioni); per esempio, se si può scrivere:

$$(31 a) \quad f(\mathbf{p}, E) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int F(\mathbf{x}, t) \exp [i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iEt] d^4 x,$$

si trova immediatamente che

$$(31 b) \quad f(\mathbf{p}, -E) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int F(\mathbf{x}, -t) \exp [i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iEt] d^4 x.$$

E la presenza simultanea di questi due fatti (particella ad energia negativa, sì, ma che viaggia indietro nel tempo) permette una ortodossa interpretazione

(3) Gli argomenti di questo lavoro sono stati sviluppati nelle successive pubblicazioni citate in Bibl. [26], particolarmente nell'ultima.

della falda inferiore di iperboloide come rappresentante gli stati cinematici della *antiparticella* (rispetto ai vari osservatori inerziali [5, 7, 21]). Ad esempio, se una particella con energia e carica elettrica negativa, *ecc.*, viaggiante indietro nel tempo, viene emessa da A al tempo  $t_2 > t_1$  e quindi assorbita da B al tempo  $t_1 < t_2$ , potremo dire che, al tempo  $t_2$ , A *acquista* energia e carica positive, mentre, al tempo  $t_1$ , B *perde* energia e carica positive. Dato che  $t_2 > t_1$ , è ovvio che il fenomeno in esame *apparirà* come lo scambio *da B ad A* di una normale particella di energia e carica positiva, *ecc.* (l'*antiparticella*), viaggiante regolarmente in avanti nel tempo.

Ma se le antiparticelle<sup>(4)</sup> sono « realmente » reinterpretazioni di « enti ad energia negativa viaggianti *indietro* nel tempo (*rispetto alle comuni particelle!*) », dovrebbe essere possibile il seguente esperimento [22], in cui gli « effetti » dovrebbero precedere cronologicamente le loro « cause ». Secondo la nostra ipotesi di lavoro, infatti, il *flusso controllabile* di enti fisici proviene da A (usualmente considerato il rivelatore, per le antiparticelle) e non da B (la sorgente di antiparticelle). Si ponga allora una « scatola », con un « otturatore », intorno agli A (ad esempio nuclei assorbenti  $\beta^+$ , che noi però considereremo come sorgenti di particelle ad energia negativa. Aprendo l'otturatore a tempi scelti consultando tavole di valori a caso (eventi  $e_1$ ), noi potremmo trovare una *correlazione statistica* tra questi tempi e quelli in cui si osservano forti rinculi dei B (eventi  $e_2$ ). I B possono ad esempio essere nuclei  $\beta^+$  - attivi, che noi considereremo come nuclei assorbenti particelle ad energia negativa. In tal caso, dovremmo concludere che gli eventi  $e_1$  ed  $e_2$  sono connessi causalmente, essendo gli  $e_1$  le cause (perché controllati da tavole di valori *casuali*). Ripetiamo che sarebbe impossibile considerare gli eventi  $e_2$  come accaduti spontaneamente, perché statisticamente correlati con gli eventi  $e_1$  scelti a caso.

Ma, per ogni osservatore, gli  $e_2$  sono avvenuti *prima* degli  $e_1$ : così potremmo essere forzati a concludere l'esistenza di casi (come quello descritto nel considerare lo scambio di un'antiparticella) in cui l'ordine temporale di cause ed effetti appare invertito.

Un punto essenziale per distinguere tra le due interpretazioni (in termini di « reali » antiparticelle, o di « particelle ad energia negativa e viaggianti *indietro* <sup>(5)</sup> nel tempo ») è questo: se il flusso controllabile (inteso, di antiparticelle) proviene dai B, allora si osserveranno numerosi rinculi, molto più frequenti che non le aperture dell'otturatore; nel caso contrario, si dovrebbero osservare rinculi *solo* in corrispondenza con gli scatti dello « shutter » (e un pò di tempo *prima*). Il test potrebbe essere eseguito facendo ricorso agli acceleratori, in cui le antiparticelle appaiono poter circolare per lunghi tempi.

Anche se il « flusso controllabile » apparisse provenire dagli A, si potrebbe continuare a parlare in termini di sole antiparticelle (« dimenticando » così

(4) Nel nostro universo c'è un'asimmetria fisica tra particelle e antiparticelle: assumeremo le seconde essere le più rare (generalmente parlando).

(5) Rispetto alla freccia assegnata (convenzionalmente) al tempo per le particelle comuni.

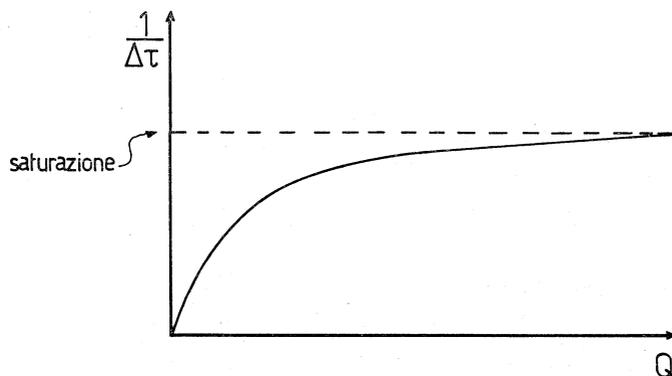
le « particelle ad energia negativa viaggianti indietro nel tempo » <sup>(6)</sup>, purché si rinunci a richiedere sempre l'usuale ordine cronologico causa-effetto.

L'esperimento ideale, nella forma sopra proposta, è però troppo ingenuo, e poco « consistente » da un punto di vista sperimentale. Vediamo di discuterlo e, quindi, di precisarlo.

Supponiamo [23] che la sorgente B di  $\beta^+$  sia costituita da  $^{22}\text{Na}$ , i cui nuclei appaiono decadere emettendo, appunto, un positone e poi un « gamma » ( $\gamma_1$ ) da 1270 KeV, rivelabile con un « detector » D. I  $\beta^+$  verranno poi rivelati indirettamente, attraverso le loro annichilazioni (con elettroni), entro A, in due altri gamma ( $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ ). Naturalmente l'intera successione di eventi può essere *sempre* ugualmente descritta dicendo che in A giungono i  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ , che da A si diparte un « buffon », e che questo fa decadere un  $^{22}\text{Na}$  (in B), previa emissione del  $\gamma_1$ .

L'esperimento « discriminante » suggerito <sup>(7)</sup> può semplificarsi [18, 24] nel seguente modo: quando nei pressi di A c'è lo shutter, il « detector » D dovrebbe indicare un « fondo » di  $\gamma_1$  da 1270 KeV molto più basso di quando detto shutter *non si trova* lungo la direzione del fascio (di positoni, o di « buffons »). Ma quanto sopra vale nell'ipotesi che non ci siano altre sorgenti di « buffons » nei pressi di D.

Purtroppo, *qualsiasi* oggetto « materiale » può fungere da annichilatore di  $\beta^+$  (benché con differenti efficienze), ovvero da emettitore di « buffons ». Dato che, concretamente, i nuclei di  $^{22}\text{Na}$  sono sempre circondati da « materia », si può immaginare che ordinariamente il sodio-22 sia in condizione di « saturazione », cosicché la sua vita media  $\Delta\tau$  appare una costante ed è quello che è (si veda la figura, in cui Q è funzione della distribuzione di « materia » attorno agli  $^{22}\text{Na}$ ).



Lo stesso « detector » D dei  $\gamma_1$  potrebbe portare gli  $^{22}\text{Na}$  alla « saturazione ». Affinché l'esperimento possa essere statisticamente significativo, occorrerebbe a priori porre l'intero apparato lontano da oggetti materiali (per esempio,

(6) D'ora in avanti chiameremo, ad esempio, « Buffons » le « particelle ad energia negativa e viaggianti indietro nel tempo », per semplicità.

(7) Il quale come minimo deve poter stabilire, ripetiamo, se il flusso *controllabile* emana da A o da B.

negli spazi interplanetari?), per quanto possibile, e *valutare* l'influenza - verso la « saturazione » - del « detector » D sugli  $^{22}\text{Na}$ . Ma le difficoltà non sono finite: infatti lo shutter (« materiale ») stesso può essere visto come annichilatore di  $\beta^+$ , cioè come emettitore di « buffons »; pertanto: *a*) o si possono usare dei sistemi « A + shutter » con efficienze così diverse, da ottenere dei risultati, a priori, definitivamente distinguibili; *b*) o si ricorre a uno shutter *elettromagnetico*: ma in questo caso si sarebbe in presenza di una certa quantità di nuova « materia » - ed esempio il magnete - non lontana da D (e bisognerebbe cercare di rendere la distanza tra A e B la più grande possibile).

Si può suggerire [25] anche un secondo « esperimento ideale »: si inviino « negli spazi interplanetari » un gruppo di  $n$  atomi di  $^{22}\text{Na}$  (ad esempio per un anno) e, contemporaneamente, un cristallo di un sale di  $^{22}\text{Na}$ , contenente lo stesso numero  $n$  di  $^{22}\text{Na}$ . Basterà, al ritorno, misurare le « decay-rates » finali relative a quelle iniziali. Ma anche in tale secondo esperimento ideale compaiono alcune delle difficoltà più sopra discusse, soprattutto perché gli *stessi* atomi di  $^{22}\text{Na}$  sono « materiali » (contengono elettroni), e quindi non solo sono  $\beta^+$  - attivi, ma possono anche assorbire dei  $\beta^+$ , ovvero emettere « buffons ».

In entrambi i casi, tuttavia, gli esperimenti ideali proposti appaiono essere significativi e *consistenti* sia « logicamente » che « sperimentalmente », mentre le difficoltà esaminate sembrano soprattutto di carattere sperimentale (cioè di efficienze, significatività statistica, attuale realizzabilità, e così via).

### Ringraziamenti

È un vero piacere potere ringraziare il Professor Piero Caldirola per il continuo interessamento durante questo lavoro. L'autore è poi grato ai Professori A. Agodi, T. Alvager, A. J. Kálnay, I. F. Quercia, E. C. G. Sudarshan e ai Dottori M. Baldo, Seb. Cavallaro, G. Giaquinta, D. Gutkovski, N. A. Mancini, V. S. Olkhovsky, V. Rapisarda, E. Turrisi per stimolanti, utili discussioni o scambi epistolari.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] J. DHAR e E. C. G. SUDARSHAN, « Phys. Rev. », *174*, 1808 (1968) e bibliografia ivi citata; M. GLÜCK, « Nuovo Cimento », *62A*, 791 (1969). Ved. anche Bibl. [5, 7, 8]. Le ricerche sperimentali dei tachioni sono condotte ad esempio da Alvager; si veda T. ALVAGER, « Phys. Rev. », *171*, 1357 (1968).
- [2] V. S. OLKHOVSKY e E. RECAMI, « Nuovo Cimento », *53A*, 610 (1968), e lavori ivi citati.
- [3] D. I. BLOKHINTSEV, *Macroscopic Causality*, preprint IC/67/36, IAEA (Trieste, 1967).
- [4] M. L. GOLDBERGER e K. M. WATSON, *Collision Theory* (New York, 1963).
- [5] V. S. OLKHOVSKY e E. RECAMI, « Nuovo Cimento », *63A*, 814 (1969), e lavori ivi citati.
- [6] C. L. HAMMER e T. A. WEBER, « Journ. Math. Phys. », *8*, 494 (1967). Però è facile verificare - ad esempio nel caso di scattering da potenziale e del calcolo dei *time-shifts* - che i risultati forniti dai due formalismi di matrice U e di matrice S coincidono non appena il pacchetto considerato si trova fuori della regione del potenziale. Cfr. Bibl. [26].
- [7] E. RECAMI, « Giornale di Fisica », *10*, 195 (1969), e lavori ivi citati. Ved. anche Bibl. [5, 8].
- [8] M. BALDO e E. RECAMI, « Lett. Nuovo Cimento », *2*, 643 (1969), e bibliografia citata.

- [9] A. J. KÁLNAY e B. P. TOLEDO, «Nuovo Cimento», 48A, 997 (1967); A. J. KÁLNAY, «Bol. Inst. Matem. Astron. Fis.», 2, 41 (1966).
- [10] Ved. Bibl. [9], e inoltre J. A. GALLARDO, A. J. KÁLNAY, B. A. STEC e B. P. TOLEDO, «Nuovo Cimento», 48A, 1008 (1967); 49A, 393 (1967); J. A. GALLARDO, A. J. KÁLNAY e S. H. RISENBERG, «Phys. Rev.», 158, 1484 (1967); A. J. KÁLNAY, reports IC/68/95 e IC/69/134 (Trieste, 1969); M. BUNGE e A. J. KÁLNAY, preprint F. 1 (Universidad, Lima); A. J. KÁLNAY e P. TORRES, «Internat. Journ. Theor. Phys.» (to appear, 1970); nonché A. J. KÁLNAY, comunicazione privata.
- [11] Cfr. ad esempio S. S. SCHWEBER, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, p. 60 (Evanston, 1961).
- [12] J. A. GALLARDO, A. J. KÁLNAY, B. A. STEC e B. P. TOLEDO, «Nuovo Cimento», 49A, 393 (1967).
- [13] K. B. WOLF, «Nucl. Phys.», 11B, 159 (1969).
- [14] W. PAULI, «Handbuck der Physik», 23/1, 143 (1926). Infatti in relatività lo spettro energetico è illimitato; si cfr. anche Bibl. [5, 7, 8, 15], nonché A. A. BROVLES «Phys. Rev.» 1D, 979 (1970) e bibliografia ivi citata.
- [15] E. C. G. SUDARSHAN, comunicazione privata.
- [16] A. PERES, «Lett. Nuovo Cimento», 1, 837 (1969).
- [17] R. P. FEYNMAN, «Phys. Rev.», 76, 749 (1949).
- [18] T. ALVAGER, comunicazioni private.
- [19] O. M. P. BILANIUK, V. K. DESHPANDE e E. C. G. SUDARSHAN, «Am. Journ. Phys.», 30, 718 (1962).
- [20] R. G. NEWTON, «Phys. Rev.», 162, 1274 (1967).
- [21] E. RECAMI, report IFUM-088/S.M. (Milano, agosto 1968).
- [22] Un analogo esperimento è stato suggerito da R. Newton per gli antitachioni, nel caso che esistano. Ved. Bibl. [20].
- [23] I. F. QUERCIA e F. TURRISI, comunicazione privata.
- [24] A. AGODI, comunicazione privata.
- [25] N. A. MANCINI e V. RAPISARDA, comunicazione privata.
- [26] Gli argomenti trattati in questo lavoro sono stati ulteriormente sviluppati in E. RECAMI, «Lett. Nuovo Cimento», 4, 73 (1970); M. BALDO, G. FONTE e E. RECAMI, «Lett. Nuovo Cimento», 4, 241 (1970) e in particolare in V. S. OLKHOVSKY e E. RECAMI: in corso di stampa come Preprint ITF-70, Academy of Sciences (Kiev), e «to be submitted for publication».