
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

RICCARDO CENERINI

**Onde generate da perturbazioni sul pelo libero di un
bacino**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 49 (1970), n.1-2, p. 64–76.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_1-2_64_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Onde generate da perturbazioni sul pelo libero di un bacino.* Nota (*) di RICCARDO CENERINI (**), presentata dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — First order waves produced on a lake by aperiodic perturbation of the surface (wind stress, atmospheric pressure gradient etc.) are studied.

The expression of the build-up of water level as a function of time is obtained via Fourier and Hankel finite transforms and Laplace transforms. The calculation method is valid for a general space-time distribution of the perturbation.

INTRODUZIONE

Le onde sulla superficie di un bacino possono essere generate da cause di varia natura. Si pensi all'insorgere improvviso di un forte vento o ad una brusca depressione atmosferica; alla caduta di una frana, a un terremoto o, nel caso di un bacino di alimentazione di una centrale idroelettrica, ad una brusca variazione della portata prelevata [1].

Misure sistematiche sono state effettuate nei grandi laghi americani [2] per tentare di stabilire una correlazione delle caratteristiche delle oscillazioni del pelo libero con la variazione della pressione barometrica e l'intensità del vento.

Nel presente studio viene affrontata per via teorica, l'analisi delle onde che sorgono in un bacino dopo l'applicazione di una perturbazione di tipo aperiodico su una porzione della superficie. Il problema viene affrontato con il metodo delle trasformate finite di Fourier, di Hankel e con la trasformata di Laplace.

Il vantaggio del sistema di calcolo è che consente di prendere in considerazione una distribuzione sia spaziale che temporale della azione perturbatrice di tipo molto generale.

1. — *Linearizzazione della prima approssimazione delle equazioni delle onde.*

Le oscillazioni dello specchio d'acqua verranno studiate ammettendo che le lunghezze d'onda in gioco siano maggiori della profondità H dell'acqua, con la prima approssimazione delle equazioni dei liquidi perfetti, trascurando la variazione delle componenti orizzontali della velocità con la profondità.

Ammettiamo che esista un potenziale $\Phi(x, y, t)$ di velocità. La linearizzazione delle equazioni, nell'ipotesi che la velocità delle particelle sia piccola, porta a:

$$(I) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{1}{gH} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1970.

(**) Istituto di Idraulica dell'Università di Bologna.

La (1) se il fondo è piatto e orizzontale ($H = \text{cost.}$), diviene:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

ove: $c = \sqrt{gH}$ è la velocità di propagazione dei disturbi.

2. - Condizioni di sorgente.

Supponiamo che il bacino abbia forma di anello circolare, con raggio interno a e raggio esterno b . Il bacino circolare è un caso particolare la cui soluzione può essere ricavata, almeno per quanto riguarda gli sviluppi analitici, seguendo un procedimento analogo a quello che si esporrà per l'anello circolare.

La inclinazione delle sponde sia tale da assicurare la condizione dell'annullamento della componente normale della velocità delle particelle sui cerchi di raggio a e b ⁽¹⁾.

A partire dall'istante $t = 0$ venga applicata su una parte dello specchio d'acqua una sollecitazione che, per fissare le idee, si immagini costituita da una variazione della pressione atmosferica $p_0(r, \vartheta, t)$ rispetto al resto del bacino. La (2) in coordinate polari, diviene:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p_0}{\partial t} = - \frac{g}{c^2} \frac{\partial \eta_0}{\partial t}$$

ove $\eta_0(r, \vartheta, t)$ è l'altezza della colonna d'acqua equivalente alla pressione p_0 .

Esprimiamo $\eta_0(r, \vartheta, t)$ (che si suppone di valore unitario) separando le variabili:

$$(4) \quad \eta_0(r, \vartheta, t) = R(r_1; r_2; r) \cdot \Theta(\vartheta_0; \vartheta) \cdot T(t).$$

Per fissare le idee, supponiamo che:

$R(r_1; r_2; r)$ sia nulla per r esterno all'intervallo $r_1 \leq r \leq r_2$ e uguale a 1 per r interno a tale intervallo.

$\Theta(\vartheta_0; \vartheta)$ sia nulla per ϑ esterno all'intervallo $-\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$ e uguale a 1 per ϑ interno a tale intervallo. $T(t)$ può essere una funzione qualsivoglia. Ammettiamo che sia una funzione gradino unitaria: $T = H(t)$, cioè un brusco aumento di pressione che duri per un periodo di tempo sufficientemente lungo rispetto all'intervallo in cui si calcola il movimento della superficie ⁽²⁾.

(1) Il coefficiente di riflessione (rapporto fra ampiezza dell'onda riflessa e incidente) di una sponda che non dà luogo a trasmissione di energia (ad esempio diga o spiaggia in declivio) dipende essenzialmente dalla sua pendenza. In pratica si assume un coefficiente di riflessione nullo per pendenze della sponda minori di 15° e un coefficiente di riflessione di 0,9 per pendenze maggiori di 25° [3].

(2) Si deve notare che una tale perturbazione genererebbe un'onda che non è trattabile con le ipotesi semplificative della equazione (1). Però, come si dirà più esplicitamente in seguito, il metodo consente anche di considerare, tramite l'integrale di convoluzione, un andamento più graduale della pressione e quindi un fenomeno che rientra nelle schematizzazioni introdotte.

La (3) diviene con la (4):

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = - \frac{g}{c^2} R \cdot \Theta \cdot \delta(t)$$

ove $\delta(t)$ è la funzione di Dirac.

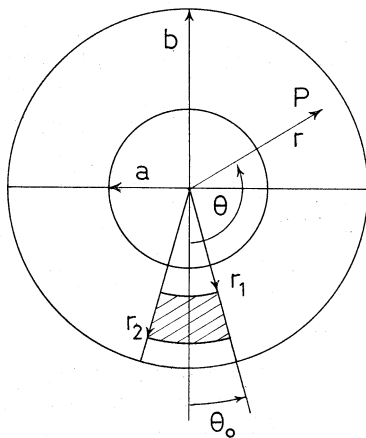


Fig. 1.

La fig. 1 indica la superficie del bacino su cui viene esercitata la sovrappressione.

3. - *Trasformata di Fourier.*

Per risolvere la (3 bis) rispetto al potenziale, da cui ricavare la sopraelevazione del pelo libero:

$$\eta(r, \vartheta, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{\rho g} p_0(r, \vartheta, t)$$

trasformiamo anzitutto i due membri della (3 bis), secondo la trasformata finita di Fourier coseno, rispetto all'angolo ϑ .

Indichiamo tale trasformata con:

$$(5) \quad \Phi_n(r, n, t) = \int_0^\pi \Phi(r, \vartheta, t) \cos n\vartheta \, d\vartheta.$$

La trasformata della 3 bis diviene allora:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \int_0^\pi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} \cos n\vartheta \, d\vartheta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} =$$

$$= - \frac{g}{c^2} R \cdot \delta(t) \cdot \int_0^\pi \Theta \cdot \cos n\vartheta \, d\vartheta.$$

Per la simmetria della sorgente rispetto all'asse $\vartheta = 0$ è:

$$(7) \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right]_{\vartheta=0} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right]_{\vartheta=\pi} = 0 \quad (8) \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=a} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=b} = 0.$$

Le condizioni iniziali (salvo eventualmente per i punti vicini alla zona a cui si applica il disturbo) sono:

$$(9) \quad [\Phi]_{t=0^+} = 0 \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{t=0^+} = 0.$$

La (6) diviene, conto tenuto della forma della funzione Θ e della (7):

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \Phi_n - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} = - \frac{g}{c^2} \cdot R \delta(t) \cdot \frac{\sin(n\vartheta_0)}{n}.$$

Infatti è:

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} \cos n\vartheta \, d\vartheta = -n^2 \Phi_n + (-1)^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\pi} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=0}$$

e per le (7):

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} \cos n\vartheta \, d\vartheta = -n^2 \cdot \Phi_n.$$

4. - *Trasformata di Hankel.*

Trasformiamo ora i due membri della (10) secondo Hankel rispetto al raggio r , intendendo per trasformata finita di Hankel l'operazione:

$$(11) \quad H[\Phi_n(r, n, t)] = \bar{\Phi}_n(p_{nk}, n, t) = \int_a^b r \cdot W(p_{nk} r) \cdot \Phi_n(r, n, t) \, dr.$$

Nella definizione usuale $W(p_{nk} r)$ è una funzione di Bessel. Però nel nostro caso è opportuno, per il momento, indicare con $W(p_{nk} r)$ una funzione generica, da definirsi successivamente in modo conveniente.

$p_{nk}(b/a)$ sono una doppia infinità di autovalori, la cui determinazione risulterà evidente nel seguito.

Trasformando secondo Hankel i primi tre termini a primo membro della (10), si ha:

$$(12) \quad \int_a^b r W(p_{nk} r) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right) \right] \, dr - \int_a^b \frac{n^2}{r} W(p_{nk} r) \cdot \Phi_n(r, n, t) \, dr = \\ = \left[r \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} W \right]_a^b - \left[r \Phi_n \frac{\partial W}{\partial r} \right]_a^b + \int_a^b r \Phi_n \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} W \right] \, dr.$$

È conveniente ora imporre che la funzione $W(p_{nk} r)$ soddisfi alla condizione:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} W = -p_{nk}^2 \cdot W.$$

Ciò equivale a imporre per W una forma del tipo:

$$(14) \quad W(p_{nk} r) = A_{nk} J_n(p_{nk} r) + B_{nk} Y_n(p_{nk} r)$$

ove: A_{nk} ; B_{nk} sono quantità di cui si determinerà il rapporto; J_n ; Y_n sono le funzioni di Bessel di primo e secondo tipo.

Si imponga inoltre la seguente condizione alla derivata della funzione W :

$$(15) \quad \left[\frac{\partial W}{\partial r} \right]_{r=a} = \left[\frac{\partial W}{\partial r} \right]_{r=b} = 0.$$

Le condizioni (13) (15) e le condizioni al contorno consentono di scrivere la (12) nella forma:

$$(16) \quad \int_a^b r W \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right) \right] dr - \int_a^b r W \frac{n^2}{c^2} \Phi_n dr =$$

$$= -p^2 \int_a^b \Phi_n r W dr = -p^2 \bar{\Phi}_n(p_{nk}, n, t).$$

Pertanto la trasformata di Hankel della (10) diviene:

$$(17) \quad p^2 \bar{\Phi}_n + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} = \frac{g}{c^2} \cdot \delta(t) \cdot \frac{\sin(n\vartheta_0)}{n} \cdot \int_a^b R r W dr =$$

$$= \frac{g}{c^2} \cdot \delta(t) \cdot \frac{\sin(n\vartheta_0)}{n} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r W dr.$$

Per ricavare gli autovalori p_{nk} , si osservi che le (14) e (15) portano a:

$$(15 \text{ bis}) \quad \begin{cases} A_{nk} p_{nk} J'_n(p_{nk} a) + B_{nk} p_{nk} Y'_n(p_{nk} a) = 0 \\ A_{nk} p_{nk} J'_n(p_{nk} b) + B_{nk} p_{nk} Y'_n(p_{nk} b) = 0. \end{cases}$$

Tale sistema determina il rapporto A_{nk}/B_{nk} a patto che sia:

$$(18) \quad J'_n(p_{nk} a) Y'_n(p_{nk} b) - J'_n(p_{nk} b) Y'_n(p_{nk} a) = 0.$$

La (18) è l'equazione trascendente che definisce gli autovalori: $p_{nk} = p_{nk}(b/a)$ funzioni solo della geometria del sistema.

Si conviene di considerare solo i valori $p_{nk} > 0$ e che i valori di p_{nk} siano, per ogni n , crescenti con l'indice k .

Tali autovalori individuano i periodi propri di oscillazione del bacino ⁽³⁾ e costituiscono un insieme discreto. Ciò è elemento essenziale per una agevole operazione di antitrasformazione.

Da (15 bis) si ricava il rapporto A_{nk}/B_{nk}

$$\frac{A_{nk}}{B_{nk}} = - \frac{Y'_n(p_{nk} a)}{J'_n(p_{nk} a)}.$$

Quindi, a meno di una costante, si ha per la funzione W la forma:

$$(19) \quad W(p_{nk} r) = J'_n(p_{nk} a) Y_n(p_{nk} r) - Y'_n(p_{nk} a) J_n(p_{nk} r).$$

La (17) diviene quindi:

$$(20) \quad p_{nk}^2 \bar{\Phi}_n + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} = \frac{g}{c^2} \cdot \delta(t) \cdot \frac{\text{sen}(n\vartheta_0)}{n} \cdot \bar{W}_{nk}$$

avendo indicato con $\bar{W}_{nk} = \bar{W}_{nk}(p_{nk} a; r_1; r_2)$ l'integrale seguente:

$$(21) \quad \bar{W}_{nk} = \int_{r_1}^{r_2} [J'_n(p_{nk} a) \cdot Y_n(p_{nk} r) - Y'_n(p_{nk} a) \cdot J_n(p_{nk} r)] \cdot dr.$$

5. - *Trasformata di Laplace.*

Si trasformi ora la (20) rispetto al tempo secondo Laplace, intendendosi al solito per trasformazione di Laplace l'operazione:

$$\bar{f}_n(p_{nk}, n, s) = L[\bar{\Phi}_n(p_{nk}, n, t)] = \int_0^\infty e^{-st} \bar{\Phi}_n dt.$$

La (20) diviene:

$$(22) \quad p_{nk}^2 \bar{f}_n + \frac{1}{c^2} s^2 \left[\bar{f}_n - s(\bar{\Phi}_n)_{t=0^+} - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_n}{\partial t} \right)_{t=0^+} \right] = \\ = \frac{g}{c^2} \cdot 1 \cdot \frac{\text{sen}(n\vartheta_0)}{n} \cdot \bar{W}_{nk}.$$

Per le condizioni iniziali (9), la (22) si riduce a:

$$(23) \quad \bar{f}_n(s^2 + c^2 p_{nk}^2) = g \frac{\text{sen}(n\vartheta_0)}{n} \bar{W}_{nk}.$$

Si tratta ora di antitrasformare ripetutamente la (23) per risalire al potenziale $\Phi(r, \vartheta, t)$.

(3) I periodi delle oscillazioni d'insieme della superficie di un bacino (denominate sesse) sono stati determinati anche per forme comunque complicate del bacino [4]. Per una rassegna delle ricerche sulle sesse vedasi [5].

6. - *Antitrasformata di Laplace.*

La antitrasformata delle (23) secondo Laplace è, per note proprietà:

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}_n(p_{nk}, n, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + p_{nk}^2 c^2} g \frac{\text{sen}(n\vartheta_0)}{n} \overline{W}_{nk} \right] = \\ &= g \frac{\text{sen}(n\vartheta_0)}{n} \overline{W}_{nk} \frac{\text{sen}(p_{nk} ct)}{p_{nk} c}.\end{aligned}$$

Il vantaggio del metodo consiste nel fatto che si può considerare una sovrappressione $p_0(r, \vartheta, t)$ avente un andamento temporale generico $T(t)$ con derivata:

$$\frac{dT(t)}{dt} = T'(t).$$

In tale caso infatti si ottiene agevolmente la risposta temporale del sistema sostituendo nella (24) e formule successive al posto di $\text{sen}(p_{nk} ct)$ l'integrale di convoluzione:

$$\int_0^t T'(\tau) \cdot \text{sen}[p_{nk} c(t - \tau)] \cdot d\tau.$$

7. - *Antitrasformata di Hankel.*

Più delicata è l'operazione di antitrasformazione secondo Hankel. Il fatto, già riscontrato, che gli autovalori p_{nk} costituiscono un insieme discreto, consente di effettuare l'operazione di antitrasformazione rispetto a r con una sommatoria [6]:

$$(25) \quad \Phi_n(r, n, t) = H^{-1} [\overline{\Phi}_n(p_{nk}, n, t)] = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} \cdot W(p_{nk} r).$$

Per ricavare le quantità c_{nk} si trasformino i due membri della (25) secondo Hankel:

$$\begin{aligned}(26) \quad & \int_a^b r \cdot \Phi_n(r, n, t) \cdot W(p_{ni} r) \cdot dr = \overline{\Phi} = \\ &= \int_a^b r \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} \cdot W(p_{nk} r) \cdot W(p_{ni} r) \right\} \cdot dr = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b r \cdot c_{nk} \cdot W(p_{nk} r) \cdot W(p_{ni} r) \cdot dr.\end{aligned}$$

Siccome le funzioni W sono combinazioni di funzioni di Bessel di primo e secondo tipo, l'integrale a secondo membro della (26) è diverso da zero solo per i termini: $i = k$. Quindi:

$$(27) \quad \overline{\Phi}_n = c_{nk} \int_a^b r \cdot W^2(p_{nk} r) \cdot dr.$$

L'integrale della (27) si valuta, ricordando note proprietà delle funzioni di Bessel [7], come segue:

$$(28) \quad \int_a^b r W^2(p_{nk} r) dr = \frac{1}{2} \left[r^2 \left\{ \left(1 - \frac{n^2}{p_{nk}^2 r^2} \right) W^2(p_{nk} r) - \left(p_{nk} \frac{\partial W(p_{nk} r)}{\partial r} \right)^2 \right\} \right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2} \left(b^2 - \frac{n^2}{p_{nk}^2} \right) [Y_n(p_{nk} b) \cdot J'_n(p_{nk} a) - J_n(p_{nk} b) \cdot Y'_n(p_{nk} a)]^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 - \frac{n^2}{p_{nk}^2} \right) \cdot \left(\frac{2}{\pi p_{nk} a} \right)^2.$$

Si ricava quindi per le quantità c_{nk} l'espressione:

$$(29) \quad c_{nk} = \frac{2 \bar{\Phi}_n}{\left(b^2 - \frac{n^2}{p_{nk}^2} \right) [Y_n(p_{nk} b) J'_n(p_{nk} a) - J_n(p_{nk} b) \cdot Y'_n(p_{nk} a)]^2 - \left(a^2 - \frac{n^2}{p_{nk}^2} \right) \left(\frac{2}{\pi p_{nk} a} \right)^2}.$$

Inserendo nella (25) le (29) e (24) si ottiene:

$$\Phi_n(r, n, t) = \frac{2g}{c} \frac{\sin(n\vartheta_0)}{n} \cdot$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{p_{nk}} \sin(p_{nk} ct) \bar{W}_{nk} \cdot W(p_{nk} r)}{\left(b^2 - \frac{n^2}{p_{nk}^2} \right) [Y_n(p_{nk} b) J'_n(p_{nk} a) - J_n(p_{nk} b) \cdot Y'_n(p_{nk} a)]^2 - \left(a^2 - \frac{n^2}{p_{nk}^2} \right) \left(\frac{2}{\pi p_{nk} a} \right)^2}.$$

8. - *Antitrasformata di Fourier.*

L'operazione di inversione della trasformata finita di Fourier coseno è data da:

$$(31) \quad \Phi(r, \vartheta, t) = \frac{1}{\pi} \Phi_0(r, n=0, t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r, n, t) \cos n\vartheta.$$

Applicata alla (30), la (31) fornisce l'espressione desiderata del potenziale $\Phi(r, \vartheta, t)$. Da questa si ricava la oscillazione del pelo libero (rispetto al livello di equilibrio) per la zona ove non viene applicata la sovrappressione:

$$\eta(r, \vartheta, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(r, \vartheta, t)}{\partial t} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(p_{nk} ct) \cdot \bar{W}_{0k} \cdot W(p_{0k} r)}{b^2 [Y_0(p_{0k} b) J'_0(p_{0k} a) - J_0(p_{0k} b) Y'_0(p_{0k} a)] - \frac{4}{\pi^2 \cdot p_{0k}^2}} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cdot$$

$$\frac{\cos(p_{nk} ct) \bar{W}_{nk} \cdot W(p_{nk} r) \cdot \frac{\sin(n\vartheta_0)}{n} \cdot \cos(n\vartheta)}{\left(b^2 - \frac{n^2}{p_{nk}^2} \right) [Y_n(p_{nk} b) J'_n(p_{nk} a) - J_n(p_{nk} b) \cdot Y'_n(p_{nk} a)]^2 - \left(a^2 - \frac{n^2}{p_{nk}^2} \right) \left(\frac{2}{\pi p_{nk} a} \right)^2}$$

ove $W(p_{nk} r)$ e $\bar{W}_{nk}$ sono dati rispettivamente dalla (19) e (21).

Conviene esprimere la (32) in unità adimensionali introducendo, come unità dei tempi, l'intervallo:

$$t_0 = a/c$$

occorrente all'onda per percorrere una lunghezza pari al raggio a , assunto come unitario.

Si definiscano inoltre i seguenti numeri puri:

$$\beta = \frac{b}{a} \quad ; \quad \tau = \frac{t}{t_0} \quad ; \quad \Omega_{nk} = p_{nk} a$$

$$\delta = \frac{r}{a} \quad (\text{essendo } r \text{ il punto generico in cui si calcola la sopraelevazione}).$$

Con questi simboli la (32) diviene:

$$(35) \quad \eta = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} \zeta_{0k} \Psi_{0k} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \zeta_{nk} \Psi_{nk} \frac{\sin(n\vartheta_0)}{n} \cos n\vartheta$$

ove:

$$(34) \quad A_{nk} = \cos(\Omega_{nk} \cdot \tau)$$

$$(35) \quad \zeta_{nk} = J'_n(\Omega_{nk}) \int_{\alpha_1 \cdot \Omega_{nk}}^{\alpha_2 \cdot \Omega_{nk}} Y_n(z) z \, dz - Y'_n(\Omega_{nk}) \int_{\alpha_1 \cdot \Omega_{nk}}^{\alpha_2 \cdot \Omega_{nk}} J_n(z) z \, dz$$

$$(36) \quad \Psi_{nk} = \frac{Y_n(\delta \Omega_{nk}) \cdot J'_n(\Omega_{nk}) - J_n(\delta \Omega_{nk}) Y'_n(\Omega_{nk})}{(\beta^2 \Omega_{nk}^2 - n^2) [Y_n(\beta \Omega_{nk}) J'_n(\Omega_{nk}) - J_n(\beta \Omega_{nk}) Y'_n(\Omega_{nk})]^2 - (\Omega_{nk}^2 - n^2) \left(\frac{2}{\pi \Omega_{nk}} \right)^2}$$

e ove gli autovalori $\Omega_{nk}(\beta)$ sono soluzioni di:

$$(37) \quad J'_n(\Omega_{nk}) \cdot Y'_n(\beta \Omega_{nk}) - J_n(\beta \Omega_{nk}) Y'_n(\Omega_{nk}) = 0.$$

9. - Alcune valutazioni numeriche.

La (37) è stata risolta con il calcolatore rispetto alle pulsazioni Ω_{nk} a cui corrispondono i periodi di oscillazione dei vari « modi »: $T_{nk} = 2\pi/\Omega_{nk}$ (in unità adimensionali).

Le funzioni di Bessel sono state calcolate come sviluppi in serie con l'impiego delle « subroutines » di Goldstein per quanto riguarda le J_n e di Hitchcock per quanto riguarda le Y_n .

Per ricavare le Ω_{nk} è stato impiegato il metodo dicotomico [8]. Esso consiste nel cercare per tentativi gli zeri della funzione a primo membro della (37), suddividendo ripetutamente un intervallo $\Delta\Omega_{nk}$ ai cui estremi la funzione abbia segno contrario.

Risulta che al crescere di β gli autovalori Ω_{nk} si addensano attorno allo zero. Quindi il metodo, che è basato sul fatto che gli Ω_{nk} costituiscano un insieme discreto, non è di impiego agevole, per valori elevati di β , per la lentezza della convergenza della serie. In particolare una eccessiva lentezza di convergenza si è riscontrata nel caso del bacino circolare senza ostacolo al centro, la cui soluzione formale si ricava in modo analogo a quella dell'anello, eliminando le funzioni di Bessel Y_n .

Nella Tabella I vengono riportati, per il caso $\beta = 5$, i valori di Ω_{nk} per $0 \leq n \leq 20$ e per $1 \leq k \leq 7$.

TABELLA I.
Valori di Ω_{nk} per il caso $\beta = 5$.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
0.	0,8471	1,611	2,385	3,164	3,945	4,728	5,511
1.	0,3410	0,9921	1,687	2,433	3,199	3,972	4,750
2.	0,6069	1,299	1,910	2,580	3,304	4,054	4,817
3.	0,8399	1,593	2,221	2,830	3,486	4,193	4,930
4.	1,063	1,854	2,522	3,142	3,751	4,399	5,093
5.	1,283	2,104	2,794	3,446	4,064	4,673	5,314
6.	1,500	2,347	3,053	3,723	4,368	4,986	5,595
7.	1,715	2,586	3,306	3,987	4,648	5,289	5,908
8.	1,929	2,823	3,555	4,246	4,916	5,572	6,211
9.	2,142	3,057	3,801	4,500	5,178	5,842	6,495
10.	2,354	3,289	4,045	4,752	5,436	6,106	6,766
11.	2,565	3,520	4,286	5,002	5,692	6,368	7,033
12.	2,776	3,749	4,526	5,249	5,946	6,626	7,296
13.	2,986	3,976	4,764	5,495	6,198	6,883	7,557
14.	0,0994	3,195	4,203	5,000	5,739	6,447	7,138
15.	0,1420	3,404	4,428	5,235	5,981	6,696	7,391
16.	0,1953	3,613	4,653	5,469	6,222	6,942	7,642
17.	0,2601	3,821	4,876	5,702	6,462	7,188	7,892
18.	0,3372	4,029	5,099	5,934	6,701	7,432	8,141
19.	0,2601	0,4270	4,236	5,321	6,165	6,938	7,675
20.	0,5301	4,444	5,542	6,395	7,175	7,917	8,635

Il carattere nodale dei primi « modi » di oscillazione (n, k) è illustrato nella fig. 2. In generale viene eccitato un numero elevato di tali « modi ».

Gli integrali che compaiono nella (36) sono stati risolti numericamente con il calcolatore impiegando la formula di sviluppo di Gauss-Legendre [9] (4).

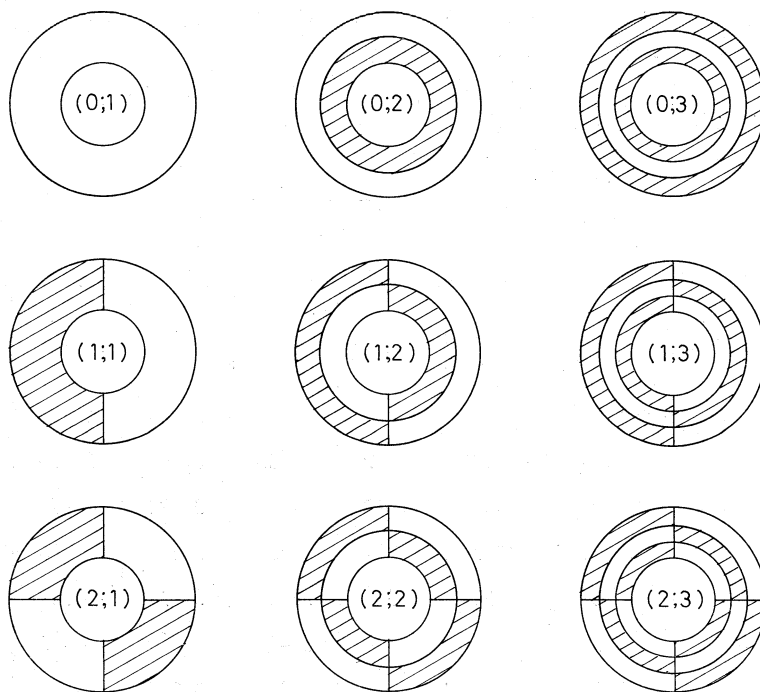


Fig. 2.

Il calcolo della (35) in funzione di τ è stato effettuato per i seguenti valori dei parametri:

$$\beta = 5 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 5 \quad \vartheta_0 = \pi/4$$

nei punti:

$$(\vartheta = \pi; \delta = 5) \quad (\vartheta = \pi; \delta = 4) \quad \left(\vartheta = \frac{2}{3}\pi; \delta = 5\right)$$

e per un intervallo di tempo seguente l'applicazione della sovrappressione dell'ordine di: $\tau = 40 t_0$.

(4) Questi integrali, in realtà, potrebbero essere risolti con combinazioni di funzioni di Bessel e con formule ricorrenti partendo dai valori per $n = 0; 1; 2$. Purtroppo però per $n = 1$ occorre introdurre anche le funzioni di Strouve H_0 ed H_1 (che non erano disponibili nel calcolatore):

$$\int_{\alpha_1 \Omega_{1k}}^{\alpha_2 \Omega_{1k}} J_1(z) z dz = \left[z J_0(z) - 2 J_1(z) + z J_2(z) + \frac{\pi}{2} z \{ H_0(z) J_1(z) - H_1(z) J_0(z) \} \right]_{\alpha_1 \Omega_{1k}}^{\alpha_2 \Omega_{1k}}.$$

Le sommatorie della (35) sono state arrestate per $n_{\max} = 20$ e $k_{\max} = 7$. Ciò, come si è riscontrato dall'andamento delle ridotte inferiori, garantisce che i termini trascurati diano un piccolo contributo.

Nella fig. 3 vengono riportati gli andamenti temporali delle oscillazioni del pelo libero che si sovrappongono al nuovo livello di equilibrio. Tale livello è: $\eta_{eq}(\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}) = +0,25$ rispetto al livello indisturbato, avendo assunta unitaria la colonna d'acqua che genera la sovrappressione.

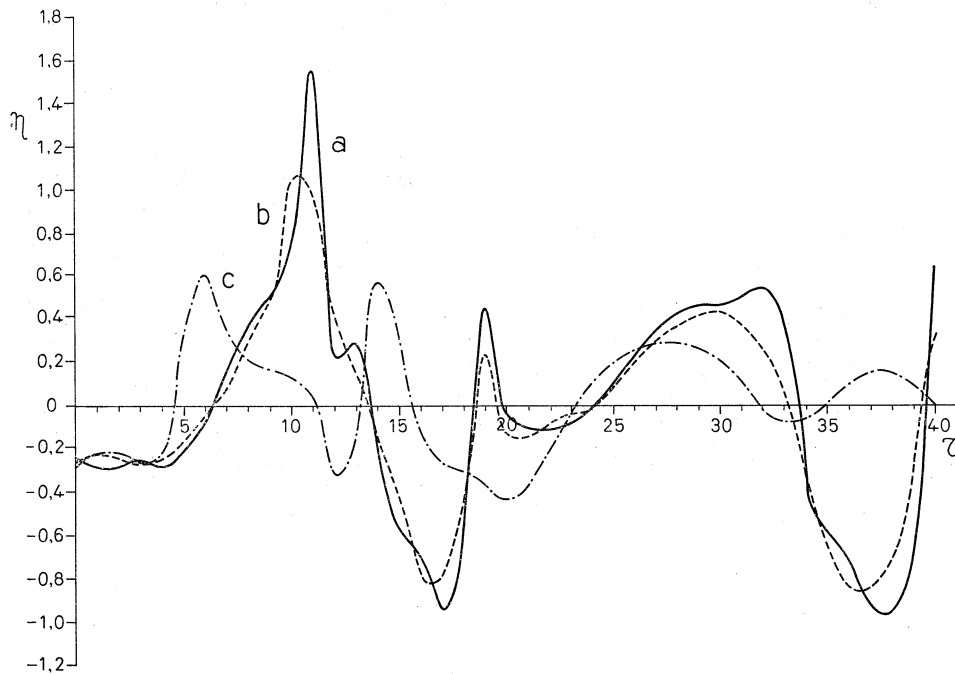


Fig. 3.

Nel punto ($\vartheta = \pi$; $\delta = 5$) (curva *a* della fig. 3) si ha, rispetto agli altri punti: ($\vartheta = \pi$; $\delta = 4$) (curva *b*) e ($\vartheta = 2/3 \pi$; $\delta = 5$) (curva *c*), una maggiore ampiezza delle oscillazioni. Ciò dipende dalla riflessione dell'onda incidente proveniente dai due lati dell'ostacolo.

Per tempi maggiori di quelli indicati nella figura, i risultati dei calcoli sarebbero scarsamente significativi perché nelle equazioni non sono stati introdotti gli attriti che provocano un progressivo smorzamento delle oscillazioni.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. M. BINNIE, *The theory of artificial seiches*. « Journal of hydraulic research », 6, n. 2, 107 (1968).
- [2] D. LEE HARRIS, *Wind tide and seiches in the great lakes*. Proceedings of IV Conference in Coastal Engineering 1953.
- [3] A. T. IPPEN, *Estuary and coastline hydrodynamics*. Mc Graw-Hill Book Company, 276.
- [4] G. A. PEZZOLI, *Oscillazioni libere del lago di Pieve di Cadore e Contributo allo studio delle oscillazioni del lago di Vico*, Archivio di Oceanografia e Limnologia, 10, fasc. 1-2 (1955).
- [5] G. SUPINO, *Le reti Idrauliche*, 382 sgg.
- [6] C. J. TRANTER, *Integral Transforms in Mathematical Physics*, N. Y. John Wiley and Sons, Inc. p. 88.
- [7] Y. L. LUKE, *Integral of Bessel functions*, p. 255.
- [8] J. LABORDE, *Cours et exercices de calcul numérique*, Dunod, Paris 1965.
- [9] A. H. STROUD-DON SECREST, *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall Serie in Automatic Computation.