Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Fontana

Epimorfismi e monomorfismi nella teoria delle categorie concrete

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.1-2, p. 5–10.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_1-2_5_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Matematica. — *Epimorfismi e monomorfismi nella teoria delle categorie concrete* (*). Nota (**) di MARCO FONTANA, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Conditions are given for epimorphisms (monomorphisms) in a concrete category to be surjective (injective) in the set-theoretical sense.

Lo scopo che ci prefiggiamo è di vedere quali relazioni esistano tra epimorfismi [monomorfismi] e suriezioni [iniezioni] (1) nelle categorie concrete.

Per « categoria concreta » si intende una categoria $\mathcal{K}$, per la quale sia definito un funtore fedele $D : \mathcal{K} \to \mathrm{Ens}$ (essendo Ens la categoria di tutti gli insiemi), che chiameremo « funtore distratto ».

È noto che non ogni categoria è concreta (cfr. [2] p. 108).

Non è restrittivo, a norma delle Propp. 10.3 e 10.4 di [1], dire che una categoria è concreta se è isomorfa ad una sottocategoria $\overline{\mathrm{Ens}}$ di Ens, ovvero se è possibile « immergerla » nella categoria Ens.

Indichiamo con:

$$|\cdots| : \mathcal{K} \to \mathrm{Ens}$$

il funtore immersione, e con $\overline{\mathrm{Ens}}$ l'immagine del funtore $|\cdots| : \mathcal{K} \to \mathrm{Ens}$ (talvolta, scriveremo più espressivamente: $\overline{\mathrm{Ens}} = |\mathcal{K}|$). Chiamiamo « insieme sostegno » l'insieme $|A|$ che è associato dal funtore $|\cdots|$ ad un qualsiasi oggetto A di $\mathcal{K}$.

$\overline{\mathrm{Ens}}$ è una sottocategoria di Ens (cfr. [1] p. 62).

Per quanto detto, la nostra indagine può essere rivolta allo studio delle relazioni che ci sono tra epimorfismi [monomorfismi] di $\overline{\mathrm{Ens}}$ ed epimorfismi [monomorfismi] di Ens, che, come è noto, coincidono con le suriezioni [iniezioni].

È noto che:

PROPOSIZIONE I: *Nelle categorie* Grp *e* Mod (R) *ogni epimorfismo definisce una suriezione tra gli insiemi sostegno, e, dualmente, ogni monomorfismo una iniezione.*

Però, non ogni categoria concreta gode delle proprietà sopra esposte:

PROPOSIZIONE II: *Nelle categorie*:

Hsp (degli spazi topologici di Hausdorff)
Mnd (dei monoidi)
Rng (degli anelli)

(*) Lavoro svolto nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 9 (Geometria, Algebra e Questioni connesse) del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1970.

(1) Quando parleremo di « suriezione » e di « iniezione » ci riferiremo ad applicazioni, rispettivamente, suriettive ed iniettive (= 1 — 1) tra insiemi, mentre useremo i termini di « epimorfismo » e di « monomorfismo » solo nel loro significato categorico.

gli epimorfismi non definiscono necessariamente suriezioni tra gli insiemi sostegno [nelle categorie duali, i monomorfismi non definiscono necessariamente iniezioni tra gli insiemi sostegno].

In generale è evidente che ogni epimorfismo [monomorfismo] di una categoria è un epimorfismo [monomorfismo] in ogni sua subcategoria. Quindi, in particolare, gli epimorfismi [monomorfismi] di Ens sono epimorfismi [monomorfismi] di $\overline{\text{Ens}}$ perciò:

PROPOSIZIONE III: *In una qualsiasi categoria concreta, un morfismo che definisca una suriezione* [iniezione] *tra gli insiemi sostegno è un epimorfismo* [monomorfismo].

È ovvio che:

PROPOSIZIONE IV: *Ogni retrazione* [coretrazione] *in una categoria concreta definisce una suriezione* [iniezione] *tra gli insiemi sostegno.*

La condizione precedente è sufficiente ma non necessaria. Consideriamo la seguente categoria concreta piccola $\mathcal{K}_2$ con due oggetti e tre morfismi di cui diamo lo schema:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "1_X"] \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[loop above, "1_Y"] \end{tikzcd}$$

$|X| = \{x\}, \quad |Y| = \{y\}.$

Il morfismo $u : X \to Y$ definisce l'applicazione

$$|u| : |X| \to |Y|$$

che manda x in y.

È evidente che u è un epimorfismo [monomorfismo] e che $|u|$ è una suriezione [iniezione] tra gli insiemi sostegno, però $u : X \to Y$ non è una retrazione [coretrazione].

Cercheremo ora di indebolire la condizione della Prop. IV introducendo un nuovo concetto, onde arrivare ad una condizione necessaria e sufficiente.

Sia $\overline{\mathcal{C}}$ una sottocategoria di una categoria $\mathcal{C}$ qualsiasi.

Definizione 1: Un morfismo $\bar{u} \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\bar{A}, \bar{B})$ è una RETRAZIONE DEBOLE di $\overline{\mathcal{C}}$ in $\mathcal{C}$ se è una retrazione in $\mathcal{C}$, cioè se esiste un morfismo $u' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{B}, \bar{A})$ tale che:

$$u' \bar{u} = 1_{\bar{B}}.$$

*Definizione 1**: Un morfismo di $\overline{\mathcal{C}}$ è una CORETRAZIONE DEBOLE di $\overline{\mathcal{C}}$ in $\mathcal{C}$ se è una coretrazione in $\mathcal{C}$.

Evidentemente, ogni retrazione [coretrazione] di $\overline{\mathcal{C}}$ è una retrazione [coretrazione] debole di $\overline{\mathcal{C}}$ in $\mathcal{C}$, ma non è vero il viceversa. Ad esempio

$|u| : |A| \to |B|$ è una retrazione [coretrazione] debole di $|\mathcal{K}_2|$ in Ens, ma non è una retrazione [coretrazione] di $|\mathcal{K}_2|$.

PROPOSIZIONE V: *$\bar{u} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\bar{A}, \bar{B})$ è una retrazione debole se e solo se preso comunque un morfismo $\bar{b} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\bar{X}, \bar{B})$ esiste un morfismo $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{X}, \bar{A})$ tale che il diagramma*:

$$\begin{tikzcd} & \bar{X} \arrow[dl, dashed, "a"'] \arrow[d, "\bar{b}"] \\ \bar{A} \arrow[r, "\bar{u}"'] & \bar{B} \end{tikzcd}$$

risulti commutativo.

Dimostrazione ($|\!\Rightarrow$): Preso comunque il morfismo $\bar{b} : \bar{X} \to \bar{B}$ in $\bar{\mathcal{C}}$ il morfismo $\bar{b}u' : \bar{X} \to \bar{A}$ soddisfa la nostra richiesta.

($\Leftarrow\!|$) È ovvia, basta prendere $\bar{X} = \bar{B}$ e $\bar{b} = 1_{\bar{B}} : \bar{B} \to \bar{B}$.

Per dualità, si ottiene una Proposizione V* relativa alle coretrazioni deboli.

Le Proposizioni V e V* ci permettono di collegare il concetto di retrazione [coretrazione] debole con il concetto di oggetto proiettivo [iniettivo]. È noto che nella categoria Ens ogni insieme è proiettivo, ed ogni insieme non vuoto è iniettivo.

PROPOSIZIONE VI: *Un epimorfismo* [monomorfismo] $u : A \to B$ *di una categoria concreta definisce una suriezione* [iniezione] *tra gli insiemi sostegno se e solo se* $|u| : |A| \to |B|$ *è una retrazione* [coretrazione] *debole di* $\overline{\mathrm{Ens}}$ *in* Ens.

Dimostrazione ($|\!\Rightarrow$): Se $|u| : |A| \to |B|$ è una suriezione, allora presa comunque una applicazione $|v| : |X| \to |B|$ (indotta da un morfismo $v : X \to B$), essendo ogni oggetto di Ens proiettivo, esiste una applicazione $f : |X| \to |A|$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & {|X|} \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "{|v|}"] \\ {|A|} \arrow[r, "{|u|}"'] & {|B|} \end{tikzcd}$$

e questo equivale a dire che $|u|$ è una retrazione debole di $\overline{\mathrm{Ens}}$ in Ens. (Ved. Proposizione V).

($\Leftarrow$) È banale. Infatti se:

$$|u|\, f_1 = |u|\, f_2$$

allora:

$$u'\,|u|\, f_1 = u'\,|u|\, f_2$$

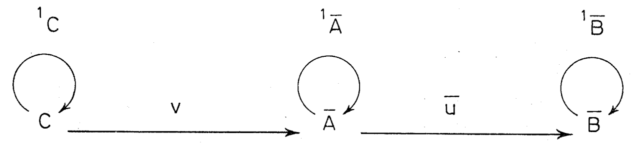
cioè:

$$f_1 = f_2 .$$

Generalizzando, si ha che:

PROPOSIZIONE VII: *Se* $\bar{u} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\bar{\mathrm{A}}, \bar{\mathrm{B}})$ *è una retrazione* [coretrazione] *debole di una sottocategoria* $\bar{\mathcal{C}}$ *di una categoria qualsiasi* $\mathcal{C}$, *allora* $\bar{u} : \bar{\mathrm{A}} \to \bar{\mathrm{B}}$ *è un epimorfismo* [monomorfismo] *in* $\mathcal{C}$.

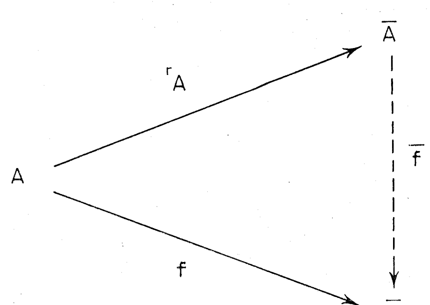
Non vale il viceversa, in generale. Consideriamo la seguente categoria $\mathcal{C}$:



con tre oggetti $\mathrm{C}, \bar{\mathrm{A}}, \bar{\mathrm{B}}$ e sei morfismi $1_{\mathrm{C}}, 1_{\bar{\mathrm{A}}}, 1_{\bar{\mathrm{B}}}, v, \bar{u}, v\bar{u}$. Sia $\bar{\mathcal{C}}$ la sottocategoria formata dagli oggetti $\bar{\mathrm{A}}$ e $\bar{\mathrm{B}}$, e dai morfismi $1_{\bar{\mathrm{A}}}, 1_{\bar{\mathrm{B}}}, \bar{u}$. $\bar{u} : \bar{\mathrm{A}} \to \bar{\mathrm{B}}$ è un epimorfismo [monomorfismo] di $\mathcal{C}$, però non è una retrazione [coretrazione] debole di $\bar{\mathcal{C}}$ in $\mathcal{C}$.

Finora abbiamo dato delle condizioni locali, cioè relative a singoli morfismi, vogliamo adesso determinare delle condizioni globali sulla sottocategoria $|\mathcal{K}| = \overline{\mathrm{Ens}}$ di Ens affinché gli epimorfismi [monomorfismi] definiscano sempre suriezioni [iniezioni] tra gli insiemi sostegno.

Ricordiamo che una sottocategoria $\bar{\mathcal{C}}$ di una categoria qualsiasi $\mathcal{C}$ si dice « sottocategoria riflessiva » se ogni oggetto di $\mathcal{C}$ ha « riflessione » in $\bar{\mathcal{C}}$, cioè se per ogni oggetto A di $\mathcal{C}$ esiste un oggetto $\bar{\mathrm{A}}$ di $\bar{\mathcal{C}}$ ed un morfismo $r_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \bar{\mathrm{A}}$ in maniera tale che, preso comunque un oggetto $\bar{\mathrm{X}}$ di $\bar{\mathcal{C}}$ ed un morfismo $f : \mathrm{A} \to \bar{\mathrm{X}}$ in $\mathcal{C}$, esiste ed è unico il morfismo $\bar{f} : \bar{\mathrm{A}} \to \bar{\mathrm{X}}$ in $\bar{\mathcal{C}}$ che rende commutativo il seguente diagramma:



La nozione duale di sottocategoria riflessiva è quella di « sottocategoria coriflessiva ».

PROPOSIZIONE VIII: *Se* $\overline{\mathcal{C}}$ *è una sottocategoria riflessiva* [coriflessiva] *di* $\mathcal{C}$, *allora ogni monomorfismo* [epimorfismo] *di* $\overline{\mathcal{C}}$ *è un monomorfismo* [epimorfismo] *di* $\mathcal{C}$.

Dimostrazione: Sia $\bar{u} : \bar{A} \to \bar{B}$ un monomorfismo di $\overline{\mathcal{C}}$.

Supponiamo che:

$$Y \xrightarrow{g_1} \bar{A} \xrightarrow{\bar{u}} \bar{B} = Y \xrightarrow{g_2} \bar{A} \xrightarrow{\bar{u}} \bar{B}.$$

Siano $\bar{g}_1 : \bar{Y} \to \bar{A}$ e $\bar{g}_2 : \bar{Y} \to \bar{A}$ gli unici due morfismi di $\overline{\mathcal{C}}$ che rendono commutativi i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd} & \overline{Y} \arrow[dd, dashed, "\bar{g}_1"] \\ Y \arrow[ur, "r_Y"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\ & \overline{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \overline{Y} \arrow[dd, dashed, "\bar{g}_2"] \\ Y \arrow[ur, "r_Y"] \arrow[dr, "g_2"'] & \\ & \overline{A} \end{tikzcd}$$

Allora:

$$g_1 \bar{u} = g_2 \bar{u} \Longleftrightarrow r_Y \bar{g}_1 \bar{u} = r_Y \bar{g}_2 \bar{u} \Longrightarrow \bar{g}_1 \bar{u} = \bar{g}_2 \bar{u}$$

(perché se fosse $\bar{g}_1 \bar{u} \neq \bar{g}_2 \bar{u}$ allora sarebbe $g_1 \bar{u} \neq g_2 \bar{u}$, come si prova facilmente).

Sappiamo che $\bar{u}$ è un monomorfismo di $\overline{\mathcal{C}}$, quindi:

$$\bar{g}_1 \bar{u} = \bar{g}_2 \bar{u} \Longrightarrow \bar{g}_1 = \bar{g}_2$$

e questo implica che:

$$r_Y \bar{g}_1 = r_Y \bar{g}_2$$

cioè:

$$g_1 = g_2 .$$

PROPOSIZIONE VIII′: *Se* $\overline{\mathrm{Ens}}$ *è una sottocategoria riflessiva* [coriflessiva] *di* Ens, *allora ogni monomorfismo* [epimorfismo] *di* $\mathfrak{K}$ *definisce una iniezione* [suriezione] *tra gli insiemi sostegno.*

Utilizziamo per i nostri scopi il concetto di epifuntore e funtore rappresentabile.

PROPOSIZIONE IX: *In una categoria concreta* $\mathfrak{K}$, *per la quale il funtore* $|\cdots| : \mathfrak{K} \to \mathrm{Ens}$ *sia rappresentabile, gli epimorfismi definiscono suriezioni tra gli insiemi sostegno se e solo se l'oggetto* P *che rappresenta il funtore* $|\cdots|$ *è un oggetto proiettivo di* $\mathfrak{K}$.

Dimostrazione ($\Leftarrow$): Consideriamo un qualsiasi diagramma del tipo:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P} \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "u"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

Per le ipotesi fatte, $|u| : |\mathrm{A}| \twoheadrightarrow |\mathrm{B}|$ è una suriezione.

Facciamo vedere che esiste un morfismo $w : \mathrm{P} \dashrightarrow \mathrm{A}$ che rende commutativo il diagramma precedente. Indichiamo con b l'elemento dell'insieme $|\mathrm{B}|$ che è associato, nell'equivalenza naturale tra il funtore $|\cdots|$ e il funtore H^{P}, all'elemento $v \in \mathrm{H}^{\mathrm{P}}(\mathrm{B})$. Poiché $|u|$ è una suriezione, esisterà certamente un elemento $a \in |\mathrm{A}|$ tale che:

$$a\,|u| = b\,.$$

Se indichiamo con $w \in \mathrm{H}^{\mathrm{P}}(\mathrm{A})$ l'elemento associato ad $a \in |\mathrm{A}|$ nell'equivalenza naturale, è facile verificare che:

$$wu = v\,.$$

($\Rightarrow$) Dire che P rappresenta il funtore $|\cdots|$ è lo stesso che dire che $|\cdots|$ è naturalmente equivalente ad H^{P}. Dire che P è proiettivo equivale a dire che H^{P} è un epifuntore. Quindi si conclude che $|\cdots|$ è un epifuntore cioè conserva gli epimorfismi.

Dualizzando la Prop. IX, utilizzando cioè i concetti di monofuntore, funtore controvariante rappresentabile, oggetto iniettivo, si ottiene un risultato relativo ai monomorfismi e alle iniezioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, New York 1965.

[2] P. FREYD, *Abelian categories*, Harper and Row, New York 1964.

[3] I. BUCUR e A. DELEANU, *Introduction to the theory of categories and functors*, A Wiley, Interscience Publication, 1968.

[4] W. V. LAWVERE, *An elementary theory of the category of sets*, «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1506–1511 (1963).

[5] *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, La Jolla 1965 (Edited by S. Eilenberg, D. K. Harison, S. Mac Lane, H. Rohrl).

[6] *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 99. *Category Theory, Homology Theory and their Applications*, Springer, 1969.