Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Bressan

Sul significato cinematico della divergenza spazio temporale dei vettori spaziali rappresentanti un flusso nel cronotopo relativistico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.1-2, p. 57–63.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_1-2_57_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Meccanica razionale. — *Sul significato cinematico della divergenza spazio temporale dei vettori spaziali rappresentanti un flusso nel cronotopo relativistico.* Nota di ALDO BRESSAN, presentata (*) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — The author shows that, from the kinematic point of view, the relativistic analogue of the classical divergence $q^r{}_{/r}$ of a flux vector, q^r, is a space time divergence and not a spatial one. He also strives to justify the relativization of $q^r{}_{/r}$ employed by Eckart in the first principle, where q^r represents the heat flux.

1. – INTRODUZIONE

Nelle equazioni classiche di conservazione di una grandezza fisica $\mathfrak{M}$, che può avere sorgenti, figura un vettore q^r che ne rappresenta il flusso. Per esempio nel caso che $\mathfrak{M}$ sia il calore, q^r è il vettore di corrente termica.

Riferendoci per semplicità ad un osservatore inerziale, la divergenza di q^r cambiata di segno, $-q^r{}_{/r}$, rappresenta in ogni caso l'afflusso di $\mathfrak{M}$ per unità di spazio e di tempo.

A proposito della trattazione relativistica dei suddetti problemi C. Cattaneo afferma – cfr. [5, pp. 18, 19] – sostanzialmente quanto segue: (i) È consuetudine relativizzare la divergenza classica $q^r{}_{/r}$ in una divergenza spaziale, $-q^\alpha{}_{/\overset{\perp}{\alpha}}$, evidentemente per l'immediata analogia col caso classico; (ii) tuttavia è perfettamente accettabile anche la relativizzazione di $q^r{}_{/r}$ in una divergenza spazio–temporale $q^\alpha{}_{/\alpha}$, la quale differisce notoriamente di pochissimo dalla $q^\alpha{}_{/\overset{\perp}{\alpha}}$ (1); (iii) quest'ultima possibilità presenta anzi il pregio di considerare l'ingresso della grandezza $\mathfrak{M}$ entro un elemento $d\mathfrak{F}$ del fluido di riferimento come un fatto tipicamente spazio temporale; (iv) in ogni caso eventuali motivi di preferenza potranno manifestarsi soltanto a posteriori quando ad esempio l'una o l'altra scelta consenta una maggiore coerenza, ovvero un'unità di formulazione di principi di conservazione di natura fisica diversa che altrimenti risulterebbero troppo dissimili l'uno dall'altro.

Cattaneo ammette la seconda relativizzazione di $q^r{}_{/r}$ e mostra, con considerazioni energetiche, dinamiche e di gravitazione, che a posteriori essa è preferibile all'altra (2).

(*) Nella seduta del 13 giugno 1970.

(1) Usiamo la convenzione di Einstein e intendiamo che gli indici latini (liberi o no) varino da 1 a 3 e quelli greci da 0 a 3. Inoltre denotiamo la derivazione covariante mediante una sbarretta.

(2) Fa ciò trattando, in relatività generale, tra l'altro, la conservazione dell'energia, quella della quantità di moto in relazione con gli forzi interni, e il teorema di Gauss per universi statici – cfr. [5, nn. 11, 12, 14[.

Nella presente Nota mostro con considerazioni di pura cinematica nel cronotopo Riemanniano che nei problemi di conservazione la $q^\alpha_{/\alpha}$ e non la $q^\alpha_{/\overset{\perp}{\alpha}}$ ha il significato fisico (puramente cinematico) di analogo della divergenza classica $q^r_{/r}$, fornendo così un motivo a priori della suddetta ammissione fatta da Cattaneo. Ciò inoltre spiega come, secondo l'affermazione (iv), la seconda relativizzazione di $q^r_{/r}$ risulti preferibile in base all'esame di varie fondamentali equazioni fisiche di conservazione – cfr. nota (2).

Tuttavia, per esempio l'affermazione (iv) non esclude che in alcuni fenomeni di conservazione (o di flusso) una $q^r_{/r}$ classica venga relativizzata in un terzo modo.

Ciò accade per esempio nella teoria della conduzione termica di C. Eckart – che è stata applicata da vari autori – ove q^r denoti il vettore di conduzione termica. Le suaccennate considerazioni di cinematica servono per interpretare un termine, $q^\alpha_{/\alpha}$, nella relativizzazione di $q^r_{/r}$ proposta da Eckart. In questa vi è un termine ulteriore piccolissimo. Al § 4, basandosi tra l'altro su un'osservazione di Eckart stesso, si tende a mostrare che dal punto di vista fisico non solo la presenza di un tale termine è tollerabile, ma è richiesta.

2. – Sul flusso rispetto ad un fluido $\mathcal{F}$ di una grandezza invariabilmente collegata ad un fluido $\mathcal{F}'$ avente al pari di $\mathcal{F}$ moto assegnato

Consideriamo il cronotopo Σ_4 in relatività generale ed esprimiamone la metrica Einsteiniana nella forma

$$(1) \qquad ds^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad \text{con } g_{00} < 0 \quad - \quad \text{cfr. nota (1)}.$$

Siano u^α e γ^α due versori del genere tempo definiti in una regione 4-dimensionale R_4 di Σ_4, e rivolti verso il futuro. Essi definiscono il moto di due fluidi di riferimento $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$. Volendo si può identificare $\mathcal{F}$ con un corpo continuo $\mathcal{C}$, e $\mathcal{F}'$ con un gas diffondentesi in $\mathcal{C}$.

Con referenza ad $\mathcal{F}$ introduciamo il proiettore spaziale $\overset{\perp}{g}_{\alpha\beta}$ e l'operazione $T^{\cdots}_{\cdots\alpha} \to T^{\cdots}_{\cdots\overset{\perp}{\alpha}}$ di proiezione spaziale degli indici di tensori:

$$(2) \qquad \overset{\perp}{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \quad , \quad T^{\cdots}_{\cdots\overset{\perp}{\alpha}} = T^{\cdots}_{\cdots\varrho} \overset{\perp}{g}{}^\varrho_\alpha \quad , \quad \overset{\perp}{T}_{\alpha\cdots\varrho} = T_{\overset{\perp}{\alpha}\cdots\overset{\perp}{\varrho}} .$$

Intendendo con $\delta_{\alpha\beta}$ il simbolo di Kronecker, diremo che il riferimento (x) è *localmente naturale e proprio* (rispetto ad $\mathcal{F}$) se localmente si ha

$$(3) \qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0 \quad , \quad g_{00} = -1 \quad , \quad g_{ar} = \delta_{ar} \quad , \quad u^\varrho = \delta^\varrho_0 .$$

Rappresentando il moto del generico punto di $\mathcal{F}'$ nella forma $x^\alpha = x^\alpha(s)$, si riconosce che in co-ordinate localmente naturali (o pseudoeuclidee) e proprie riesce

$$(4) \qquad \gamma^\alpha = \frac{Dx^\alpha}{Ds} = \frac{V^\alpha}{\sqrt{1 - \mathcal{V}^2}} \qquad \text{ove } V^\alpha = \frac{Dx^\alpha}{Dx^0} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}^2 = \delta_{rs} V^r V^s .$$

Consideriamo una grandezza fisica $\mathfrak{M}$ distribuita in R_4, e sia ψ la sua densità rispetto ad $\mathfrak{F}'$. Allora la densità ψ_u di $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{F}$ (ossia rispetto ad un osservatore solidale con $\mathfrak{F}$) è caratterizzata dalla condizione $\psi_u \, dV = \psi \, dV'$ ove dV' è il volume proprio di un elemento $d\mathfrak{F}'$ di $\mathfrak{F}'$, ossia quello misurato rispetto a $\mathfrak{F}'$, mentre dV è il volume di $d\mathfrak{F}'$ misurato rispetto ad $\mathfrak{F}$. Ne segue $dV = \sqrt{1 - \mathfrak{V}^2} \, dV'$, cosicché riesce – cfr. (1)

$$\psi_u = \frac{\psi}{\sqrt{1 - \mathfrak{V}^2}} = \psi\gamma^0 = -\psi\gamma^0 u_0 \quad \text{onde} \quad \psi_u = -\psi\gamma^\beta u_\beta \, . \tag{5}$$

Poniamo

$$q_\alpha = \psi\overset{1}{\gamma}_\alpha \quad , \quad \text{onde } q_\alpha u^\alpha = 0 \, . \tag{6}$$

Da (6), $(5)_4$ e (2) segue

$$\psi\gamma^\alpha = q^\alpha - \psi\gamma_\beta u^\beta u^\alpha = q^\alpha + \psi_u u^\alpha \, . \tag{7}$$

Ora supponiamo che la grandezza $\mathfrak{M}$ sia invariabile rispetto ad $\mathfrak{F}'$, il che com'è noto – vedi per esempio [1, $(141)_2$, p. 144] – è caratterizzato dalla condizione

$$(\psi\gamma^\alpha)_{/\alpha} = 0 \qquad (\gamma_\alpha \gamma^\alpha = 1) \, . \tag{8}$$

Ciò accade per esempio nel caso che $\mathfrak{F}'$ sia un gas diffondentesi in $\mathcal{C}$ $(=\mathfrak{F})$ e che $\mathfrak{M}$ sia la sua *massa convenzionale*, ossia la massa a riposo che $\mathfrak{F}'$ ha in un prefissato stato di riferimento – cfr. [2, n. 2]. Allora il vettore $q^\alpha = \psi\overset{1}{\gamma}{}^\alpha$ rappresenta il flusso di tale massa.

Se il fluido $\mathfrak{F}'$ ha una energia interna costante, la massa convenzionale coincide con la massa a riposo di $\mathfrak{F}'$. Però nemmeno in questo caso si potrebbe identificare la $\mathfrak{M}$ con la massa di $\mathfrak{F}'$ rispetto a $\mathfrak{F}$, in generale.

Consideriamo una sezione spaziale $\overset{*}{\sigma}_3$ di Σ_4 che tagli tutte le linee di flusso del vettore γ^α; inoltre assegnamo ad arbitrio su $\overset{*}{\sigma}_3$ lo scalare k^*, e diciamo dC^* il volume proprio di un elemento $d\mathfrak{F}$ di $\mathfrak{F}$ nell'attraversamento di $\overset{*}{\sigma}_3$, dC quello che $d\mathfrak{F}$ ha quando «passa» per un punto evento x^α; inoltre poniamo (3)

$$k \, dC = k^* \, dC^* \qquad \text{onde} \quad \frac{D k \, dC}{Ds} = 0 \tag{9}$$

ove con D denotiamo differenziazione assoluta lungo le linee di flusso del vettore u^α. Ne segue – cfr. [1, $(141)_2$] – che $(ku^\alpha)_{/\alpha} = 0$, cosicché

$$(\psi_u u^\alpha)_{/\alpha} = \frac{\psi_u}{k} (ku^\alpha)_{/\alpha} + \left(\frac{\psi_u}{k}\right)_{/\alpha} u^\alpha k = 0 + k \frac{D}{Ds} \frac{\psi_u}{k} \, . \tag{10}$$

(3) Se identifichiamo $\mathfrak{F}$ con un corpo continuo $\mathcal{C}$, possiamo pensare $k^* \, dC^*$ come massa convenzionale del $d\mathcal{C}$ $(= d\mathfrak{F})$.

Per (7) e (8), per (10) e per $(9)_2$ si ha rispettivamente

$$(11) \qquad -q^{\alpha}{}_{/\alpha}\,dC = (\psi_u u^{\alpha})_{/\alpha}\,dC = k\,dC\,\frac{D}{Ds}\,\frac{\psi_u}{k} = \frac{D}{Ds}(\psi_u\,dC).$$

La $\psi_u\,dC$ è la quantità della grandezza $\mathfrak{M}$ che si trova nel $d\mathfrak{F}$ e $D(\psi_u\,dC)/Ds$ la sua velocità di variazione rispetto ad $\mathfrak{F}$; inoltre la grandezza $\mathfrak{M}$, pensata come solidale ad $\mathfrak{F}'$, si conserva per ipotesi; in altre parole è priva di sorgenti. Sulla base di (11) si conclude che $-q^{\alpha}{}_{/\alpha}\,dC$ *e non* $-q^{\alpha}{}_{/\overset{\perp}{\alpha}}\,dC$ *ha il significato di quantità di* $\mathfrak{M}$ *che entra algebricamente nel* $d\mathfrak{F}$.

Si aggiunga che da $(5)_1$ e da $(6)_2$, (7) e $(8)_2$ segue rispettivamente

$$(12) \qquad \psi\psi_u \geq 0 \quad , \quad q^{\alpha} q_{\alpha} - \psi_u^2 = -\psi^2 (\leq 0).$$

3. – Analogo cinematico in Relatività della divergenza spaziale di un campo classico rappresentante il flusso di una qualunque grandezza

Nel § 2 abbiamo considerato $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ (ossia $u^{\alpha}, \gamma^{\alpha}$) e la densità ψ di $\mathfrak{M}$ rispetto ad $\mathfrak{F}'$ come dati e abbiamo ricavato il flusso q^{α} di $\mathfrak{M}$ rispetto ad $\mathfrak{F}$. Ora consideriamo come dati (ad arbitrio) $\mathfrak{F}$ e il campo spaziale q^{α} – cfr. $(6)_2$. Inoltre fissiamo un tubo T_4 limitato, appartenente ad R_4 e formato con linee di flusso di questo campo. Sia σ_3 una sezione spaziale di T_4. È certo possibile fissare su σ_3 i valori di ψ_u (positivi e abbastanza grandi) in modo che per la corrispondente soluzione $\psi_u = \psi_u(x)$ dell'equazione differenziale

$$(11') \qquad k\,\frac{D}{Ds}\,\frac{\psi_u}{k} = -q^{\alpha}{}_{/\overset{\perp}{\alpha}} \qquad \text{– cfr. } (11)_{1,2}$$

riesca $\psi_u^2 > q^{\alpha} q_{\alpha} (> 0)$ in T_4, cosicché il vettore $q^{\alpha} + \psi_u u^{\alpha}$ sia del genere tempo. Allora in T_4 è determinato lo scalare reale $\psi \neq 0$ verificante le $(12)_{1,2}$ e il versore γ^{α} verificante (7); e inoltre γ^{α} risulta del genere tempo.

Le (7), $(6)_2$ e $(12)_1$ implicano $\psi^2 \gamma^{\alpha} u_{\alpha} = -\psi\psi_u \leq 0$, onde il versore γ^{α} non può che esser rivolto verso il futuro, al pari di u^{α}.

In primo luogo il suddetto campo spaziale q^{α} può essere interpretato in T_4 come quello rappresentante il flusso della massa convenzionale di un gas mobile rispetto ad $\mathfrak{F}$ con velocità parallela a q^{α} – $q_{\underset{\alpha}{}} = \psi\gamma_{\underset{\alpha}{\perp}}$, cfr. (7); inoltre, volendo, $\mathfrak{F}$ può identificarsi con un corpo continuo $\mathcal{C}$ – cfr. nota [(3)].

In secondo luogo q^{α} può esser identificato con il flusso in $\mathfrak{F}$ di un'arbitraria grandezza $\mathfrak{M}$.

Dapprima supponiamo che la $\mathfrak{M}$ non abbia sorgenti. Allora è spontaneo pensarla come solidale ad un opportuno fluido $\mathfrak{F}'$ e a distribuzione invariabile rispetto ad esso. È pure spontaneo pensare tale fluido come mobile parallelamente a q^{α} $(\gamma_{\underset{\alpha}{\perp}} \parallel q_{\alpha})$.

Inoltre, essendo dato il flusso q^{α} di $\mathfrak{M}$ rispetto ad $\mathfrak{F}$, in generale è lecito aggiungere alla distribuzione spazio-temporale di $\mathfrak{M}$ un'arbitraria distribuzione (di $\mathfrak{M}$) in $\mathfrak{F}$ indipendente dal tempo, cosicché la densità ψ di $\mathfrak{M}$ rispetto a $\mathcal{F}'$ può esser supposta ovunque positiva in T_4. Allora $\mathcal{F}'$ può rappresentarsi mediante il gas sopra considerato, purché la densità propria di massa convenzionale di questo eguagli ψ.

Le considerazioni precedenti di cinematica relativistica mostrano che $-q^\alpha{}_{/\alpha}\,dC$ ($q^\alpha u_\alpha = 0$) e non $-q^\alpha_{\overset{\perp}{/\alpha}}\,dC$ ha il significato (cinematico) di analogo relativistico dell'espressione $-q^r{}_{/r}\,dC$ posseduta in Fisica classica dalla quantità di $\mathfrak{M}$ che entra nel $d\mathcal{F}$ per unità di tempo (quando q^r rappresenti il flusso di $\mathfrak{M}$).

Le precedenti considerazioni concernono direttamente il caso di assenza di sorgenti; tuttavia la conclusione trattane è compatibile con il caso generale e non può essere accettata solo in quello particolare.

Consideriamo ora appunto il caso generale che la grandezza $\mathfrak{M}$ abbia sorgenti. Al vettore flusso q^α definito in T_4 possiamo di nuovo associare il gas precedente. Ora la derivata temporale (in $\mathcal{F}$) della sua massa convenzionale racchiusa nel $d\mathcal{F}$ eguaglia il contributo dato dal flusso q^α di $\mathfrak{M}$ alla analoga derivata della quantità di $\mathfrak{M}$ contenuta nel $d\mathcal{F}$.

Il contributo rimanente è prodotto dalle sorgenti di $\mathfrak{M}$ nel $d\mathcal{F}$.

4. – Sulla versione relativistica di Eckart del primo principio in presenza di conduzione termica

Se $-q^r{}_{/r}$ è un termine di una equazione fisica classica, le considerazioni ci dicono come interpretare $-q^\alpha{}_{/\alpha}$ nel caso che $-q^\alpha{}_{/\alpha}$ sia un termine della corrispondente equazione fisica relativistica. Tuttavia le stesse considerazioni non implicano affatto che $-q^\alpha{}_{/\alpha}$ vada usato nella seconda equazione come analogo relativistico del termine $-q^r{}_{/r}$ nella prima.

Per esempio l'espressione classica kq_{ass} del calore assorbito per unità di tempo e volume (propri) a causa della conduzione termica, è $-q^r{}_{/r}$. D'altro canto, nella nota teoria termodinamica relativistica di Eckart presentata in relatività ristretta, ma facilmente estendibile (ed estesa) alla relatività generale, il primo principio della termodinamica si scrive

$$ck\,\frac{Dw}{Ds} + cX^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta} = kq_{\text{ass}} = -q^\alpha{}_{/\alpha} - q^\alpha A_\alpha \qquad \left(A^\alpha = \frac{Du^\alpha}{Ds}\,,\ \overset{\perp}{X}_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}\right) \tag{13}$$

ove k e kw sono la massa convenzionale e l'energia interna per unità di volume proprio attuale, e $X^{\alpha\beta}$ è il tensore (spaziale) degli sforzi. Dunque l'espressione di kq_{ass} usata in esso è la $(13)_2$.

In base a quanto si è mostrato al § 3, il termine $-q^\alpha{}_{/\alpha}$ in $(13)_2$ ha il significato cinematico di calore assorbito dal corpo continuo $\mathcal{C}\ (=\mathcal{F})$ per unità di tempo e volume proprio.

Riguardo al termine piccolissimo $q^\alpha A_\alpha$ – che ha l'ordine di c^{-2}, essendo c la velocità della luce nel vuoto – Eckart ha osservato in [6, p. 921] che sulla base del principio di equivalenza fra massa ed energia, esso può essere interpretato come il lavoro fatto dal flusso di calore attraverso la materia accelerata. Mi propongo di mostrare che $q^\alpha A_\alpha$ ha un certo significato fisico in base al quale è tutt'altro che irragionevole la presenza di $q^\alpha A_\alpha$ nella versione $(13)_{1,2}$ del primo principio.

A tale scopo, da un lato, considero un punto materiale P in fisica classica. Ne sia m la massa e v^r la velocità rispetto al fluido $\mathcal{F}$, e sia α_r l'accelerazione locale [4] di $\mathcal{F}$ rispetto ad un riferimento (x) che localmente non ruoti (rispetto agli spazi inerziali) e cada liberamente (ossia rispetto ad (x) abbia accelerazione locale necessariamente nulla un piccolo grave esente da vincoli). Allora la potenza relativa ad $\mathcal{F}$ della forza di trascinamento agente su P è $(-m\alpha_r)\,v^r = -(mv^r)\,\alpha_r$, cosicché essa dipende da m e v^r solo attraverso la quantità di moto mv^r di P.

Inoltre considero come assegnati l'accelerazione di P rispetto ad $\mathcal{F}$ e il gradiente di velocità di $\mathcal{F}$ rispetto ad (x) (eguale a quello rispetto agli spazi inerziali). Allora $m\alpha_r$ appare come quella parte della forza totale (effettiva e di trascinamento) agente su P e valutata rispetto a riferimenti che localmente non ruotano e cadono liberamente, la quale è dovuta all'accelerazione locale di P rispetto a questi riferimenti. Se questa parte è esplicata dal fluido $\mathcal{F}$, per questo $\mathcal{F}$ deve spendere la potenza $m\alpha_r v^r$, che eguaglia l'opposto $mv^r\alpha_r$ del suddetto lavoro di trascinamento.

D'altro lato, sappiamo che se il vettore f^r rappresenta il flusso di un fluido – ossia $f_r\,d\sigma^r$ eguaglia la massa del fluido che per unità di tempo attraversa una arbitraria superficie orientata elementare $d\sigma_r$ verso la faccia positiva – allora è $f^r = \mu v^r$ ove μ è la densità del fluido.

Per il principio di equivalenza fra massa ed energia possiamo associare al precedente flusso di calore q^α nell'elemento $d\mathcal{C}$ $(= d\mathcal{F})$ del corpo continuo $\mathcal{C}$ un flusso di massa rappresentato, rispetto a $d\mathcal{F}$ $(= d\mathcal{C})$ da $\mu v^r = c^{-2} q^r$.

Consideriamo il moto del $d\mathcal{C}$ in relatività generale e riguardiamolo come moto di trascinamento. Consideriamo inoltre come moto relativo il suddetto flusso q^α di calore rispetto ad $\mathcal{F}$. Inoltre consideriamo come moto assoluto quello di un riferimento (x) localmente naturale e proprio; tali riferimenti sono gli analoghi in relatività generale dei riferimenti classici che localmente non ruotano e cadono liberamente.

Allora $\alpha_r = c^2 A_r$ – cfr. $(13)_3$ – è l'accelerazione di trascinamento e per considerazioni precedenti $-\mu v^r \alpha_r = -q^\alpha A_\alpha$ è la potenza della forza di trascinamento (per unità di volume proprio) agente sulla massa associata al suddetto flusso di calore.

Si aggiunga che il (campo del) vettore q^α di corrente termica, è in generale determinato da proprietà attuali di $\mathcal{C}$ [5]; inoltre esso determina il flusso di calore rispetto a $\mathcal{F}$ $(= \mathcal{C})$, cosicché la massa associata a tale flusso può rite-

(4) Come nel seguito « locale » si riferisce al cronotopo e quindi sta per « nel punto evento che si considera ».

(5) Fra queste può includersi il gradiente spaziale $T_{/\alpha}$ della temperatura assoluta, o meglio, in luogo di esso, la quantità $\Theta_\alpha = T_{/\alpha} + TA_\alpha$ – vedi [3] – che, si noti, non determina A_α nè da sola nè assieme alle altre grandezze delle quali generalmente q^α si pensa in funzione.

nersi a moto e accelerazione, rispetto ad $\mathfrak{F}$, assegnati; infine, tenendo conto del principio di equivalenza, possiamo ritenere che $\mathcal{C}$ sospinga la detta massa. Allora in base a quanto si è detto sul punto P, il contributo di potenza speso da $\mathcal{C}$ a tale scopo, per unità di volume proprio, deve essere $\mu v^r \alpha_r$, ossia $q^\alpha A_\alpha$. Tale potenza va a detrimento dell'energia interna del $d\mathcal{C}$ e con ciò è giustificata la presenza del termine $-q^\alpha A_\alpha$ nella versione $(13)_{1,2}$ del primo principio.

È noto che l'espressione $(13)_2$ di kq_{ass} si costruisce col tensore termodinamico $c^{-1}\,\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$, con

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = u_\alpha q_\beta + q_\alpha u_\beta, \tag{14}$$

di Eckart – cfr. [6]. Il termine essenziale $-q^\alpha{}_{/\alpha}$ è il contributo di $u_\alpha q_\beta$ mentre l'altro, $-q^\alpha A_\alpha$, piccolissimo, proviene da $q_\alpha u_\beta$.

La simmetria di $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ è essenziale in relatività generale. Ma in relatività ristretta $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ potrebbe esser sostituito, a priori, da $u_\alpha q_\beta$. Le considerazioni svolte in questo numero tendono a mostrare che da un punto di vista fisico, a rigore, tale sostituzione è inopportuna (6).

BIBLIOGRAFIA

[1] BRESSAN A., *Cinematica dei sistemi continui in Relatività generale*, « Ann. Mat. pura e Appl. », *62*, 99 (1963).

[2] BRESSAN A., *Termo-magneto-fluido-dinamica in Relatività generale. Gas perfetti*, « Riv. Mat. Univ. Parma », *4*, 57 (1963).

[3] BRESSAN A., *On relativistic thermodynamics*, « Nuovo Cimento », Suppl. *48*, 2321 (1967).

[4] BRUHAT YVONNE, *Étude des équations des fluides chargés relativistes inductifs et conducteurs*, « Commun. math. phys. », 334 (1966).

[5] CATTANEO C., *Principi di conservazione e teoremi di Gauss in Relatività generale*, Edizione Cremonese, *21*, 373, Roma 1963.

[6] ECKART C., *The thermodynamics of irreversible processes, III Relativistic theory of the simple fluid*, « Phys. Rev. », *58*, 919 (1940).

[7] TOLMAN R. C., *Relativity, thermodynamics and cosmology*, (Oxford) Claredon press 1949.

(6) Naturalmente la sostituzione di $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ con $u_\alpha q_\beta$ può essere opportuna a titolo di approssimazione anche in Relatività generale.