Claudio Di Comite

Una osservazione sulle connessioni tensoriali di specie qualunque

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.1-2, p. 52–56.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_1-2_52_0>

Geometria differenziale. — *Una osservazione sulle connessioni tensoriali di specie qualunque* [*]. Nota di CLAUDIO DI COMITE, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — It is proved that a tensor connection of type (r, s) defines also a covariant differentiation for tensor fields of type $(rp + sq, sp + rq)$ where p, q are non-negative arbitrary integers.

1. – La nozione di connessione tensoriale (per tensori doppi controvarianti e covarianti) su una varietà differenziabile V di classe C^{∞} e di dimensione n è stata introdotta da E. Bompiani in [2]. Delle connessioni tensoriali (per tensori doppi controvarianti e covarianti e per tensori di specie qualunque) si sono occupati in seguito diversi autori in parecchi lavori, i principali dei quali sono riportati nella bibliografia finale.

In questo lavoro si prova che, assegnata su V una connessione tensoriale Γ di specie (r, s), resta definita, per ogni campo vettoriale differenziabile X su V, la derivazione covariante ∇_X non solo per i campi tensoriali di specie (r, s), ma anche per campi tensoriali di specie $(rp + sq, sp + rq)$, con p e q interi arbitrari non negativi. Più precisamente, detti $R, \mathfrak{F}, \mathfrak{X}, \mathfrak{T}_s^r, \mathfrak{T}\left(= \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}_s^r\right)$ rispettivamente il campo dei reali, l'algebra su R delle funzioni differenziabili su V, l'$\mathfrak{F}$–modulo dei campi vettoriali differenziabili su V, l'$\mathfrak{F}$–modulo dei campi tensoriali differenziabili di specie (r, s) su V, l'algebra su R dei campi tensoriali differenziabili su V, si prova che, assegnata su V una connessione tensoriale di specie (r, s), la derivazione covariante ∇_X, per ogni $X \in \mathfrak{X}$, è definita nella sottoalgebra $\bigoplus_{p,q=0}^{\infty} \mathfrak{T}_{sp+rq}^{rp+sq}$ dell'algebra $\mathfrak{T}$ e gode di proprietà analoghe a quelle della derivazione covariante (definita in $\mathfrak{T}$) rispetto ad una connessione (vettoriale) lineare su V.

2. – Siano r ed s due interi tali che $r + s \geq 1$, detto N l'insieme dei numeri naturali e posto $\mathfrak{Z}_s^r = \bigoplus_{(p,q) \in N^2} \mathfrak{T}_{sp+rq}^{rp+sq}$, si verifica facilmente che $\mathfrak{Z}_s^r$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{T}$ [1].

Si consideri un intorno coordinato U nel quale sia definito il sistema coordinato $\varphi : p \rightarrow (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \in R^n$. Indicato con I l'insieme dei

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Contratto di Ricerca del C.N.R. « Geometria, Algebra e Questioni Connesse ».

(**) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1970.

(1) In particolare si ha $\mathfrak{Z}_0^1 = \mathfrak{T}$.

numeri $1, \cdots, n$, si ponga:

$$\partial/\partial x^i = e_i \quad , \quad dx^i = e^i , \qquad \text{con } i \in \mathrm{I} ;$$

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} = e_\alpha^\beta \quad , \quad e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_s} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r} = e_\beta^\alpha ,$$

con $\alpha = (i_1, \cdots, i_r) \in \mathrm{I}^r$ e $\beta = (j_1, \cdots, j_s) \in \mathrm{I}^s$.

Allora la famiglia

$$(e_{\alpha_1}^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{\beta_p} \otimes e_{\sigma_1}^{\varrho_1} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma_q}^{\varrho_q})$$

con $\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \varrho_1, \cdots, \varrho_q \in \mathrm{I}^r$ e $\beta_1, \cdots, \beta_p, \sigma_1, \cdots, \sigma_q \in \mathrm{I}^s$, è la base naturale di $\mathfrak{T}_{sp+rq}^{rp+sq}(\mathrm{U})$ associata alla carta (U, φ) (2).

Supposto $p \geq 1$ e $q \geq 1$, siano i e j due interi tali che $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, si indichi con C l'$\mathfrak{F}$-omomorfismo di $\mathfrak{T}_{sp+rq}^{rp+sq}$ in $\mathfrak{T}_{s(p-1)+r(q-1)}^{r(p-1)+s(q-1)}$ il quale associa ad ogni $\mathrm{K} \in \mathfrak{T}_{sp+rq}^{rp+sq}$, con

$$\mathrm{K} \,|\, \mathrm{U} = \mathrm{K}_{\beta_1 \cdots \beta_p \, \varrho_1 \cdots \varrho_q}^{\alpha_1 \cdots \alpha_p \, \sigma_1 \cdots \sigma_q} \, e_{\alpha_1}^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{\beta_p} \otimes e_{\sigma_1}^{\varrho_1} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma_q}^{\varrho_q} , \tag{2.1}$$

il campo tensoriale $\mathrm{C}(\mathrm{K}) \in \mathfrak{T}_{s(p-1)+r(q-1)}^{r(p-1)+s(q-1)}$ tale che

$$\mathrm{C}(\mathrm{K}) \,|\, \mathrm{U} = \mathrm{K}_{\beta_1 \cdots \beta_{i-1} \beta \, \beta_{i+1} \cdots \beta_p \, \varrho_1 \cdots \varrho_{j-1} \alpha \, \varrho_{j+1} \cdots \varrho_q}^{\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha \, \alpha_{i+1} \cdots \alpha_p \, \sigma_1 \cdots \sigma_{j-1} \beta \, \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q} \, e_{\alpha_1}^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma_q}^{\varrho_q} ,$$

per ogni carta (U, φ). In altre parole, C associa a K il campo tensoriale che si ottiene da K saturando ordinatamente gli indici di controvarianza di posto $(r(i-1)+1)$-esimo $, \cdots, (ri)$-esimo, $(rp+s(j-1)+1)$-esimo $, \cdots, (rp+sj)$-esimo con gli indici di covarianza di posto $(sp+r(j-1)+1)$-esimo $, \cdots$ $\cdots, (sp+rj)$-esimo, $(s(i-1)+1)$-esimo $, \cdots, (si)$-esimo. C si chiamerà *contrazione di tipo* (p, q, i, j).

Definizione 1. – Si dirà *derivazione* di $\mathfrak{Z}_s^r$ ogni R-endomorfismo D di $\mathfrak{Z}_s^r$ verificante le seguenti condizioni:

(a) $\mathrm{D}(\mathfrak{T}_{sp+rq}^{rp+sq}) \subset \mathfrak{T}_{sp+rq}^{rp+sq}$, $\quad \forall (p, q) \in \mathrm{N}^2$;

(b) $\mathrm{D}(\mathrm{H} \otimes \mathrm{K}) = (\mathrm{DH}) \otimes \mathrm{K} + \mathrm{H} \otimes (\mathrm{DK})$, $\quad \forall \mathrm{H}, \mathrm{K} \in \mathfrak{Z}_s^r$;

(c) $\mathrm{D}(\mathrm{C}(\mathrm{K})) = \mathrm{C}(\mathrm{DK})$, per ogni contrazione C di tipo (p, q, i, j) e per ogni $\mathrm{K} \in \mathfrak{T}_{sp+rq}^{rp+sq}$.

Detto $\mathfrak{D}_s^r$ l'insieme delle derivazioni di $\mathfrak{Z}_s^r$, $\mathfrak{D}_s^r$ resta munito canonicamente di una struttura di $\mathfrak{F}$-modulo e di una struttura di algebra di Lie su R.

Analogamente a ciò che avviene per le derivazioni di $\mathfrak{T}$ (cfr. [19], p. 30), si ha che:

PROPOSIZIONE 1. – *Se* D_1 *e* D_2 *sono due derivazioni di* $\mathfrak{Z}_s^r$ *tali che* $\mathrm{D}_1 \,|\, \mathfrak{F} = \mathrm{D}_2 \,|\, \mathfrak{F}$ *e* $\mathrm{D}_1 \,|\, \mathfrak{X} = \mathrm{D}_2 \,|\, \mathfrak{X}$, *allora risulta* $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2$.

(2) Se risulta $r = 0$ o $s = 0$ i simboli precedenti vanno modificati in modo ovvio; così, se è $r = 0$, in luogo del simbolo e_α^β, ad esempio, bisogna usare il simbolo $e^\beta (= e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s})$. La stessa avvertenza vale per il seguito.

La dimostrazione, analoga a quella relativa alle derivazioni di $\mathfrak{T}$ (cfr. [19], p. 30), si omette.

Osservazione. – Si noti che, in particolare, la Def. 1 di derivazione di $\mathfrak{Z}_0^1 (= \mathfrak{T})$ coincide con l'ordinaria definizione di derivazione di $\mathfrak{T}$ (cfr. [19], p. 30).

3. – Si ricorderà anzitutto una definizione di connessione tensoriale di specie (r, s) su V utile per il seguito:

Definizione 1. – Sia $\nabla : X \to \nabla_X$ un $\mathfrak{F}$–omomorfismo di $\mathfrak{X}$ nell'$\mathfrak{F}$–modulo degli R–endomorfismi di $\mathfrak{T}_s^r$ tale che

$$\nabla_X (fK) = f\nabla_X K + X(f) K \quad , \quad \forall f \in \mathfrak{F} \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{X} \quad \text{e} \quad \forall K \in \mathfrak{T}_s^r \; ; \tag{3.1}$$

si dice allora che ∇ definisce una *connessione tensoriale* Γ *di specie* (r, s) su V; per ogni $X \in \mathfrak{X}$, ∇_X si chiama la *derivazione covariante* in direzione di X, rispetto a Γ.

Indicato con $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}_s^r)$ l'$\mathfrak{F}$–modulo degli $\mathfrak{F}$–omomorfismi di $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{D}_s^r$, si proverà che:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia* $\tilde{\nabla} : X \to \tilde{\nabla}_X$ *un elemento di* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}_s^r)$ *tale che*

$$\tilde{\nabla}_X f = X(f) \quad , \quad \forall f \in \mathfrak{F} \quad \text{e} \quad \forall X \in \mathfrak{X} , \tag{3.2}$$

allora $\tilde{\nabla}$ *definisce una connessione tensoriale di specie* (r, s) *su* V.

Infatti, indicato con $\nabla : X \to \nabla_X$ l'$\mathfrak{F}$–omomorfismo di $\mathfrak{X}$ nell'$\mathfrak{F}$–modulo degli R–endomorfismi di $\mathfrak{T}_s^r$ definito da

$$\nabla_X K = \tilde{\nabla}_X K \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{X} \quad \text{e} \quad \forall K \in \mathfrak{T}_s^r ,$$

si ha subito che ∇ verifica la (3.1) e quindi definisce una connessione tensoriale di specie (r, s) su V.

Si prova che:

PROPOSIZIONE 2. – *Sia* $\tilde{\nabla}$ *un elemento di* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}_s^r)$ *verificante la* (3.2) *e sia* U *un aperto non vuoto di* V, *esiste allora un unico elemento* $\tilde{\nabla}_U \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}(U)}(\mathfrak{X}(U), \mathfrak{D}_s^r(U))$ (3) *tale che*

$$(\tilde{\nabla}_U)_{X'} f' = X'(f') \quad , \quad \forall f' \in \mathfrak{F}(U) \quad \text{e} \quad \forall X' \in \mathfrak{X}(U) ,$$

$$(\tilde{\nabla}_U)_{X|U} (K|U) = (\tilde{\nabla}_X K) | U \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{X} \quad \text{e} \quad \forall K \in \mathfrak{Z}_s^r .$$

L'operatore $\tilde{\nabla}_U$ *dicesi indotto su* U *dall'operatore* $\tilde{\nabla}$.

La dimostrazione, analoga a quella della Prop. 4, n. 3 di [15], si omette.

(3) È ovvio il significato dei simboli $\mathfrak{F}(U)$, $\mathfrak{X}(U)$, $\mathfrak{D}_s^r(U)$ relativi alla sottovarietà aperta U.

Sia $\tilde{\nabla}$ un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}^r_s)$ verificante la (3.2) e sia Γ la connessione tensoriale di specie (r, s) su V definita da $\tilde{\nabla}$. Con le notazioni del n. 1, si ponga.

$$(\tilde{\nabla}_{\mathrm{U}})_{e_t} e^{\beta}_{\alpha} = \Gamma^{\beta\varrho}_{t\alpha\sigma} e^{\sigma}_{\varrho}, \qquad \text{con} \quad t \in \mathrm{I}, \alpha, \varrho \in \mathrm{I}^r \quad \text{e} \quad \beta, \sigma \in \mathrm{I}^s.$$

Le funzioni $\Gamma^{\beta\varrho}_{t\alpha\sigma}$ sono ovviamente le componenti di Γ rispetto ad (U, φ). Si verifica che:

PROPOSIZIONE 3. – *Se* K *è un qualunque campo tensoriale appartenente a* $\mathfrak{T}^{rp+sq}_{sp+rq}$, *con componenti rispetto ad* (U, φ) *date dalla* (2.1), *per ogni* $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$, *con componenti* X^t *rispetto ad* (U, φ), *risulta*:

$$(\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}\mathrm{K}) \mid \mathrm{U} = \mathrm{X}^t \Big(\partial \mathrm{K}^{\alpha_1 \cdots \alpha_p\, \sigma_1 \cdots \sigma_q}_{\beta_1 \cdots \beta_p\, \varrho_1 \cdots \varrho_q} / \partial x^t +$$
$$+ \sum_{1 \leq i \leq p} \Gamma^{\beta\alpha_i}_{t\alpha\beta_i} \mathrm{K}^{\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\, \alpha\, \alpha_{i+1} \cdots \alpha_p\, \sigma_1 \cdots \sigma_q}_{\beta_1 \cdots \beta_{i-1}\, \beta\, \beta_{i+1} \cdots \beta_p\, \varrho_1 \cdots \varrho_q} -$$
$$- \sum_{1 \leq j \leq q} \Gamma^{\sigma_j\, \varrho}_{t\varrho_j\, \sigma} \mathrm{K}^{\alpha_1 \cdots \alpha_p\, \sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}\, \sigma\, \sigma_{j+1} \cdots \sigma_q}_{\beta_1 \cdots \beta_p\, \varrho_1 \cdots \varrho_{j-1}\, \varrho\, \varrho_{j+1} \cdots \varrho_q}\Big) e^{\beta_1}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e^{\varrho_q}_{\sigma_q}.$$

Si prova che:

PROPOSIZIONE 4. – *Se* Γ *è una connessione tensoriale di specie* (r, s) *su* V, *esiste un unico* $\tilde{\nabla} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}^r_s)$ *verificante la* (3.2) *il quale definisce* Γ.

La dimostrazione, analoga a quella della Prop. 4, n. 1 di [16], si omette. Si osservi soltanto che l'unicità di $\tilde{\nabla}$ consegue dalla Prop. 1 del n. 1.

Dalle Prop. 1 e 4 segue che:

PROPOSIZIONE 5. – *Data una connessione tensoriale di specie* (r, s) *su* V, *resta definita, per ogni* $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}$, *la derivazione covariante* $\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}$ *in direzione di* X *non solo per campi tensoriali di specie* (r, s), *ma anche per campi tensoriali di specie* $(rp + sq, sp + rq)$, *con* p *e* q *interi non negativi.*

Osservazione 1. – Alle stesse conclusioni si può giungere considerando una connessione tensoriale di specie (r, s) su V come una connessione sullo spazio fibrato principale degli (r, s)–riferimenti di V (cfr. [13]).

Osservazione 2. – Sia $\tilde{\nabla}$ un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}^r_s)$ verificante la (3.2) e, detti p e q due interi tali che $p + q \geq 1$, sia $\nabla' : \mathrm{X} \to \nabla'_{\mathrm{X}}$ l'$\mathfrak{F}$–omomorfismo di $\mathfrak{X}$ nell'$\mathfrak{F}$–modulo degli R–endomorfismi di $\mathfrak{T}^{rp+sq}_{sp+rq}$ tale che

$$\nabla'_{\mathrm{X}}\mathrm{K} = \tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}\mathrm{K} \quad , \quad \forall \mathrm{X} \in \mathfrak{X} \quad \text{e} \quad \forall \mathrm{K} \in \mathfrak{T}^{rp+sq}_{sp+rq},$$

si ha allora che ∇' definisce su V una connessione tensoriale di specie $(rp + sq, sp + rq)$.

Osservazione 3. – Per $r = 1$ ed $s = 0$ le proposizioni precedenti esprimono delle ben note proprietà delle connessioni (vettoriali) lineari su V.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. ASTARA, *Sulle connessioni tensoriali decomponibili*, « Rend. Sem. Fac. Scienze di Cagliari », *34*, fasc. 1–2 (1964).

[2] E. BOMPIANI, *Le connessioni tensoriali*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, *1*, fasc. 5, (1946).

[3] E. BOMPIANI, *Connessioni del secondo ordine*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, *1*. fasc. 5 (1946).

[4] A. COSSU, *Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali*, « Rend. di Mat. », serie V, *13*, fasc. 3–4, Roma 1955.

[5] A. COSSU, *Sulle connessioni tensoriali integrabili*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, *19*, fasc. 5 (1955).

[6] A. COSSU, *Connessioni tensoriali per tensori doppi misti*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, *19*, fasc. 6 (1955).

[7] A. COSSU, *Una particolare classe di connessioni tensoriali*, « Rend. Mat. », serie V, *15*, fasc. 1–2, Roma 1956.

[8] A. COSSU, *Movimenti in una varietà a connessione tensoriale*, « Rend. di Mat. », serie V, 16 (1957).

[9] A. COSSU, *Movimenti in una varietà dotata di una connessione per tensori doppi misti*, « Rend. di Mat. », *16*, fasc. 3–4 (1957).

[10] A. COSSU, *Su una classe di varietà a connessione tensoriale che ammettono un gruppo d'ordine massimo di movimenti*, « Rend. di Mat. », *18*, fasc. 1–2 (1959).

[11] A. COSSU, *Movimenti speciali in una varietà a connessione tensoriale dotata di trasporto assoluto*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, *28*, fasc, 2 (1960).

[12] A. COSSU, *Varietà a connessione tensoriale per tensori doppi controvarianti che ammettono un gruppo d'ordine massimo di movimenti*, « Rend. di Mat. », *19*, fasc. 1–2 (1960).

[13] A. COSSU, *Nozioni generali sulle connessioni tensoriali di specie qualunque*, « Rend. di Mat. », *21*, fasc. 1–2 (1962).

[14] A. COSSU, *Equazioni di struttura di una connessione tensoriale di specie* $(r, 0)$ « Rend. di Mat. », *24*, fasc. 3–4 (1965).

[15] C. DI COMITE, *Pseudoconnessioni di specie* (r, s) *di ordine* n, « Annali di Mat. », serie IV, T. LXXIX (1968).

[16] C. DI COMITE, *Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziale di classe* C^{∞}, « Annali di Mat. », serie IV, T. LXXXIII (1969).

[17] B. L. FOSTER, *Some remarks on tensor differentiation*, « Annali di Mat. », serie IV, T. LIV (1961).

[18] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric spaces*, Accademic Press, 1962.

[19] S. KOBOYASHI–K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Interscience Publisher, 1963.

[20] M. KUCHARZEWSKI, *Über die Tensorübertragung*, « Annali di Mat. », serie IV, T. LIV (1961).

[21] P. MASTROGIACOMO, *Sulle connessioni tensoriali per tensori controvarianti e covarianti m–pli*, « Giornale di Mat. », *85*, fasc. 2°, Napoli 1957.

[22] P. MASTROGIACOMO, *Enti geometrici associati ad una connessione tensoriale per tensori controvarianti e covarianti m–pli*, « Rend. di Mat. », serie V, *18*, fasc. 3–4 (1959).

[23] P. MASTROGIACOMO, *Sul tensore di torsione di una connessione tensoriale per tensori controvarianti e covarianti m–pli*, « Rivista di Mat. », Univ. Parma, (2), *1* (1960).

[24] P. MASTROGIACOMO, *Su alcune classi particolari di connessioni tensoriali per tensori controvarianti e covarianti m–pli*, « Annali di Mat. », serie IV, T. LV (1961).

[25] L. TAMASSY, *Über den Affinzusammenhang von zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen*, « Acta Math. Sci. Hungaricae », *11*, 1–2 (1960).