Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ernesto Corinaldesi

Rappresentazione di Majorana per una generalizzazione dell'equazione di Dirac

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.6, p. 615–618.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_6_615_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Fisica. — *Rappresentazione di Majorana per una generalizzazione dell'equazione di Dirac.* Nota di ERNESTO CORINALDESI, presentata (*) dal Socio E. AMALDI.

SUMMARY. — The generalized Dirac equation formulated by S. Weinberg for particles of arbitrary spin is expressed in a form which is the natural extension of the Majorana representation.

Alcuni anni fa, S. Weinberg [1] formulò regole di Feynman per particelle di spin s qualunque mediante un metodo basato sull'uso di una funzione d'onda $\varphi(x)$ a $2s+1$ componenti.

Tale funzione d'onda si trasforma secondo la rappresentazione non unitaria $(s, 0)$ del gruppo di Lorentz [2]:

$$\varphi'(\mathrm{L}x) = \mathrm{D}^{(s,0)}(\mathrm{L})\,\varphi(x)\,. \tag{1}$$

Weinberg definì anche una funzione d'onda $\chi(x)$, pure a $2s+1$ componenti, che si trasforma secondo la rappresentazione $(0, s)$ del gruppo di Lorentz:

$$\chi'(\mathrm{L}x) = \mathrm{D}^{(0,s)}(\mathrm{L})\,\chi(x)\,. \tag{1'}$$

Le funzioni d'onda $\varphi(x)$ e $\chi(x)$ non sono indipendenti, ma soddisfano le relazioni [3]

$$\varphi(x) = \left(\frac{i}{m}\right)^{2s} t_{\mu_1\cdots\mu_{2s}}\,\partial^{\mu_1}\cdots\partial^{\mu_{2s}}\,\chi(x)\,, \tag{2}$$

$$\chi(x) = \left(\frac{i}{m}\right)^{2s} \bar{t}_{\mu_1\cdots\mu_{2s}}\,\partial^{\mu_1}\cdots\partial^{\mu_{2s}}\,\varphi(x)\,, \tag{2'}$$

dove $t_{\mu_1\cdots\mu_{2s}}$ e $\bar{t}_{\mu_1\cdots\mu_{2s}}$ sono matrici di dimensioni $(2s+1)\times(2s+1)$.

Benché per descrivere una particella di spin s sia sufficiente una soltanto delle funzioni d'onda $\varphi(x)$ e $\chi(x)$, ambedue queste funzioni devono venire usate qualora si vogliano costruire espressioni invarianti rispetto ad una inversione spaziale, dato che questa le trasforma l'una nell'altra:

$$\varphi'(-\vec{x}, t) = \chi(\vec{x}, t)\,,\ \chi'(-\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t)\,. \tag{3}$$

(*) Nella seduta del 13 giugno 1970.

(1) S. WEINBERG, « Phys. Rev. », *133*, B1318 (1964).

(2) Vedi, ad es., S. GASIOROWICZ, *Elementary Particle Physics*, 1966, p. 84.

(3) Viene usata per lo spazio-tempo la metrica $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$; $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$.

In conformità con l'origine storica dell'equazione di Dirac, Weinberg definì pure l'equazione d'onda a $2(2s+1)$ componenti

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Si deduce dalle (2) e (2′) che questa funzione d'onda soddisfa l'equazione di Dirac generalizzata

$$(i^{2s} \gamma_{\mu_1 \cdots \mu_{2s}} \partial^{\mu_1} \cdots \partial^{\mu_{2s}} - m^{2s}) \psi(x) = 0 , \tag{5}$$

dove le

$$\gamma_{\mu_1 \cdots \mu_{2s}} = \begin{pmatrix} 0 & t_{\mu_1 \cdots \mu_{2s}} \\ \bar{t}_{\mu_1 \cdots \mu_{2s}} & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

sono matrici di dimensioni $2(2s+1) \times 2(2s+1)$.

L'equazione (5) è invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz per le quali

$$\psi'(\mathrm{L}x) = \mathfrak{D}^{(s)}(\mathrm{L}) \psi(x) , \tag{7}$$

dove

$$\mathfrak{D}^{(s)}(\mathrm{L}) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}^{(s,0)}(\mathrm{L}) & 0 \\ 0 & \mathrm{D}^{(0,s)}(\mathrm{L}) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

e rispetto ad inversione spaziale per la quale

$$\psi'(-\vec{x}, t) = \beta \psi(\vec{x}, t) \tag{9}$$

dove

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Nel caso $s = 1/2$ la (5) non è altro che l'equazione di Dirac

$$(\gamma_\mu \partial^\mu + im) \psi(x) = 0 \tag{11}$$

nella rappresentazione di Kramers delle matrici γ [4].

Come è ben noto, altre due rappresentazioni delle matrici γ si sono dimostrate di grande utilità in problemi specifici, quella di Pauli nella trattazione del limite non relativistico, e quella di Majorana nella formulazione della coniugazione di carica [4] [5]. Tali rappresentazioni possono essere formulate anche per l'equazione di Dirac generalizzata.

(4) Vedi, ad es., E. CORINALDESI e F. STROCCHI, *Relativistic Wave Mechanics*, 1963, p. 133.

(5) E. MAJORANA, « Nuovo Cimento », *14*, 171 (1937).

La rappresentazione di Pauli per la (5) si può ottenere eseguendo la trasformazione

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}, \tag{12}$$

dove I indica la matrice unità di dimensioni $(2s+1)\times(2s+1)$. La funzione d'onda diviene

$$\psi^{\text{Pauli}} = S\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi + \chi \\ \varphi - \chi \end{pmatrix}, \tag{13}$$

ed è facile dimostrare che nel limite di piccole velocità $\varphi \cong \chi$ cosicché le prime $2s+1$ componenti della ψ^{Pauli} sono molto più grandi delle ultime $2s+1$.

La rappresentazione di Majorana si ottiene invece mediante la trasformazione

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & iC \\ (-)^{2s}\, iC & I \end{pmatrix}, \tag{14}$$

dove I ha lo stesso significato che nella (12), mentre C è la matrice della trasformazione di similitudine che trasforma le matrici $D^{(s)}(R)$ della rappresentazione irriducibile di dimensioni $2s+1$ del gruppo delle rotazioni spaziali nelle loro complesse coniugate (1),

$$CD^{(s)}(R)\,C^{-1} = D^{(s)}(R)^{*}. \tag{15}$$

Conformandoci all'uso prevalente, supporremo che la rappresentazione $D^{(s)}$ sia definita in maniera tale che la C sia una matrice reale per la quale $C^{-1} = (-)^{2s}\, C$.

Per la (14), le matrici γ diventano

$$\gamma^{\text{Majorana}} = S\gamma\, S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\,(t^{*}C - tC^{-1}) & t + (-)^{2s} t^{*} \\ \bar{t} + (-)^{2s}\, \bar{t}^{*} & i\,(-)^{2s}\,(\bar{t}^{*}C - \bar{t}C^{-1}) \end{pmatrix} \tag{16}$$

dove per brevità abbiamo omesso gli indici $\mu_1 \cdots \mu_{2s}$ delle γ e delle $t, t^{*}, \bar{t}$ e $\bar{t}^{*}$. È chiaro che le matrici γ^{Majorana} sono ad elementi tutti reali se s è intero, e tutti immaginari puri se s è semiintero. Pertanto nella rappresentazione di Majorana l'operatore che agisce sulla ψ nella (5) è reale. Di conseguenza l'invarianza dell'equazione per coniugazione di carica si riduce all'invarianza rispetto alla sostituzione di ψ con la complessa coniugata ψ^{*}.

Si noti che la trasformazione della funzione d'onda rispetto a trasformazioni di Lorentz è ora data dalle matrici

$$\mathfrak{D}^{(s)}(L)^{\text{Majorana}} = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D^{(s,0)}(L) + D^{(s,0)}(L)^{*} & -i\,[D^{(s,0)}(L) - D^{(s,0)}(L)^{*}]\,C \\ i\,C^{-1}\,[D^{(s,0)}(L) - D^{(s,0)}(L)^{*}] & D^{(0,s)}(L) + D^{(0,s)}(L)^{*} \end{pmatrix}$$

i cui elementi sono tutti reali, come è facile dimostrare usando le relazioni

$$CD^{(0,s)}(L)\,C^{-1} = D^{(s,0)}(L)^* \quad , \quad CD^{(s,0)}(L)\,C^{-1} = D^{(0,s)}(L)^* . \tag{18}$$

Nel caso di spin un mezzo, $t_0 = \bar{t}_0 = I$, $t_i = -\bar{t}_i = \sigma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dove I è la matrice unitaria 2×2 e σ_1, σ_2 e σ_3 sono le matrici di Pauli, mentre $C = -i\sigma_2$. Le matrici $\gamma_\mu^{\text{Majorana}}$ sono allora

$$\gamma_0^M = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_1^M = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} , \tag{19}$$

$$\gamma_2^M = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_3^M = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} ,$$

in accordo con le matrici α e β presentate originariamente da Majorana (5).