Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gheorghe Galbura

Sopra la risoluzione delle singolarità delle curve algebriche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.6, p. 595–601.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_6_595_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Geometria algebrica. — *Sopra la risoluzione delle singolarità delle curve algebriche.* Nota di GHEORGHE GALBURA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RÉSUMÉ. — On propose une démonstration de la resolubilité des singularités d'un courbe algebroaide, en utilisant le « Vorbereitungssatz » de Weierstrass. On en déduit le développement de Puiseux pour les coordonées du point génerique d'une courbe algébroide, dans le cas de caracteristique zero; et on esquisse une analyse de la singularité que présente en son origine une courbe algébroide irréductible.

Sia $f(x, y)$ una serie formale, di potenze, nelle variabili x, y, a coefficienti in un campo algebricamente chiuso C. Lo spazio $X = \operatorname{spec} C[[x, y]]/(f)$ è una curva algebroide piana, avente come origine l'ideale $(\widehat{x, y})$, immagine dell'ideale massimale nell'omomorfismo naturale $C[[x, y]] \to C[[x, y]]/(f)$.

Indicando con f_r la somma dei termini omogenei di grado r, della serie $f(x, y)$, possiamo scrivere $f(x, y) = f_s + f_{s+1} + \cdots$, essendo s l'ordine della serie $f(x, y)$, cioè l'ordine della singolarità che presenta nell'origine la curva X.

Supporremo $s > 1$.

Ci proponiamo di dare una dimostrazione diretta, elementare, del teorema dello scioglimento delle singolarità delle curve algebroide piane.

Il concetto di questa dimostrazione ci fu suggerito da B. Segre in una discussione sull'argomento, a Varenna, in occasione delle lezioni di Zariski, durante un Corso estivo del C.I.M.E. nel 1969.

Noi abbiamo rifinita la dimostrazione ideata da Segre, poggiando sul « Vorbereitungssatz » di Weierstrass e sul lemma di Hensel. Ne risulta lo sviluppo di Puiseux delle coordinate del punto generico di una curva algebroide definita sopra un campo di caratteristica zero, nonché la struttura della singolarità di una qualsiasi curva algebroide piana.

Ricordiamo che se il polinomio f_s si può scrivere come prodotto di due fattori primi fra loro, la serie $f(x, y)$ stessa è un prodotto di due serie, non invertibili [5], le quali si possono costruire per ricorrenza. Cioè, se f_s non è della forma $(y + \alpha x)^s$, la serie $f(x, y)$ è il prodotto di due serie, di ordine positivo, minore di s: quindi il ragionamento si può fare procedendo da tali serie.

Supporremo che $f_s = (y + \alpha_1 x)^s$. In questo caso, secondo il teorema di preparazione di Weierstrass, esiste una serie invertibile $u \in C[[x, y]]$, tale che si può scrivere $g(x, y) = uf = (y + \alpha_1 x)^s + xg'_1(x)(y + \alpha_1 x)^{s-1} + \cdots \cdots + x^s g'_s(x)$, con $g'_i(x) \in C[[x]]$.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1970.

Osserviamo che le serie $f(x, y)$ e $g(x, y)$ hanno la stessa componente omogenea di grado s. Quindi ognuna delle serie $g'_i(x)$ ha l'ordine $\geq s$, cioè si può scrivere $g'_i(x) = xg_i(x)$.

In conclusione, invece della serie $f(x, y)$, si può considerare come generatore dell'ideale $(f(x, y))$, la serie

$$g(x, y) = (y + \alpha_1 x)^s + x^2 g_1(x)(y + \alpha_1 x)^{s-1} + \cdots + x^{s+1} g_s(x), \tag{1}$$

con $g_i(x) \in C[[x, y]]$.

Consideriamo ora la serie $g(x, y)$ nell'anello $C[[x, y_1]] = C\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right]$, il trasformato monoidale di $C[[x, y]]$ secondo l'ideale massimale (x, y), cioè secondo le formule $y + \alpha_1 x = xy_1 : g(x, y) = x^s \overset{1}{g}(x, y_1)$, dove

$$\overset{1}{g}(x, y_1) = y_1^s + xg_1(x) y_1^{s-1} + \cdots + xg_s(x). \tag{2}$$

La serie $\overset{1}{g}(x, y_1)$ può presentare uno dei seguenti tre casi:

1) può avere l'ordine minore di s;

2) può avere l'ordine s, ma può darsi che la sua componente omogenea di grado s sia un prodotto di due fattori primi fra loro;

3) può avere l'ordine s, la sua componente omogenea di grado s avendo la forma $(y_1 + \alpha_2 x)^s$.

Nel primo caso, $\overset{1}{g}(x, y_1)$ presenta, nell'origine, una singolarità di ordine minore di s. Nel secondo caso, $\overset{1}{g}$ è il prodotto di due fattori $\overset{1}{g}'$ e $\overset{1}{g}''$, i quali presentano pure, nell'origine, singolarità di ordine minore di s.

In ciascuno dei primi due casi il ragionamento si può proseguire con una serie di ordine minore di s.

È chiaro che, passando a trasformate quadratiche successive, i primi due casi si possono presentare s volte, al più.

Supponiamo che la serie $\overset{1}{g}(x, y_1)$ presenti il terzo caso; cioè abbia l'ordine s e la sua componente omogenea di grado s sia della forma $(y_1 + \alpha_2 x)^s$; di modo che si possa scrivere

$$\overset{1}{g}(x, y_1) = (y_1 + \alpha_2 x)^s + x^2 \overset{1}{g}_1(x)(y_1 + \alpha_2 x)^{s-1} + \cdots + x^{s+1} \overset{1}{g}_s(x), \tag{3}$$

con $\overset{1}{g}_i(x) \in C[[x]]$.

Moltiplicando la (3) per x^s e ritornando alle variabili x, y, otteniamo, in questo caso (3),

$$g(x, y) = (y + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)^s + x^3 \overset{1}{g}_1(x)(y + \alpha_1 x + \alpha_2 x)^{s-1} + \cdots \tag{4}$$
$$\cdots + x^{2s+1} \overset{1}{g}_s(x) \equiv (y + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)^s \qquad \bmod (x, y)^{s+2}.$$

Proseguiamo con la serie (3), considerando il trasformato monoidale $C[[x, y_2]] = C\left[\left[x, \frac{y_1}{x}\right]\right]$, dell'anello $C[[x, y_1]]$, per la sostituzione $y_1 + \alpha_2 x = y_2 x$.

Nelle variabili x , y_2, la serie $\overset{1}{g}(x , y_1)$ si scrive così $\overset{1}{g}(x , y_1) = x^s \overset{2}{g}(x , y_2)$, con

(5) $$\overset{2}{g}(x , y_2) = y_2^s + x\overset{1}{g}_1(x)\, y_2^{s-1} + \cdots + x\overset{1}{g}_s(x).$$

La serie $\overset{2}{g}(x , y_2)$ può presentare l'uno dei casi 1), 2), 3) sopra enumerati; ma a noi interessa soltanto cosa si può dire rispetto alla serie (2) se entrambe le serie $\overset{1}{g}(x , y_1)$ e $\overset{2}{g}(x , y_2)$ presentano il caso 3).

Se la serie $\overset{2}{g}(x , y_2)$ presenta il caso 3), possiamo scrivere

(6) $$\overset{2}{g}(x , y_2) = (y_2 + \alpha_3\, x)^s + x^2 \overset{2}{g}_1(x)\,(y_2 + \alpha_3\, x)^{s-1} + \cdots + x^{s+1} \overset{2}{g}_s(x),$$

con $\overset{2}{g}_i(x) \in C\,[[x]]$. Moltiplicando nella (6) per x^s e ritornando alle variabili x , y_1, abbiamo

$$\overset{1}{g}(x , y_1) = (y_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2)^s + x^3 \overset{2}{g}_1(x)\,(y_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2)^{s-1} + \cdots + x^{2s+1} \overset{2}{g}_s(x).$$

Moltiplicando, anche in questa relazione per x^s e risalendo alle variabili x , y, abbiamo

(7) $$g(x , y) = (y + \alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2 + \alpha_3\, x^3)^s + x^4 \overset{2}{g}_1(x)\,(y + \alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2 + \alpha_3\, x^3)^{s-1} + \cdots + x^{3s+1} \overset{2}{g}_s(x) \equiv (y + \alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2 + \alpha_3\, x^3)^4 \quad \mathrm{mod}\,(x , y)^{s+3}.$$

Per ricorrenza, si deduce che, se le serie $\overset{1}{g}(x , y_1)$, $\overset{2}{g}(x , y_2), \cdots, \overset{r-1}{g}(x , y_{r-1})$, le quali si deducono, ognuna dalla precedente, per trasformazioni monoidali, presentano, tutte, il caso 3), allora esistono dei coefficienti $\alpha_1 , \cdots , \alpha_r \in C$, in modo che si può scrivere

(8) $$g(x , y) = (y + \alpha_1\, x + \cdots + \alpha_r\, x^r)^s + x^{r+1} \overset{r-1}{g}_1(x)\,(y + \alpha_1\, x + \cdots + \alpha_r\, x^r)^{s-1} + \cdots + x^{rs+1} \overset{r-1}{g}_s(x) \equiv (y + \alpha_1\, x + \cdots + \alpha_r\, x^r)^s \quad \mathrm{mod}\,(x , y)^{s+r}.$$

Ne risulta che, se la serie $g(x , y)$, e quindi la $f(x , y)$, non si può ridurre ad una serie di ordine 1, mediante una successione finita di trasformazioni quadratiche, allora questa serie risulta divisibile per un fattore s–uplo, e precisamente della forma $(y + \alpha_1\, x + \cdots)^s$, limite della successione

$$(y + \alpha_1\, x)^s \quad , \quad (y + \alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2)^s, \cdots .$$

Le considerazioni precedenti conducono al seguente

COROLLARIO. *Ogni curva algebroide piana, priva di componenti multiple, si può trasformare, mediante una successione finita di trasformazioni monoidali, in una curva priva di singolarità.*

Il teorema di Noether sulla riduzione delle singolarità di una curva algebrica piana si ottiene così come conseguenza immediata di questo corollario.

2. Il ragionamento precedente, applicato ad una serie formale irriducibile, a coefficienti in un corpo C, algebricamente chiuso, di caratteristica 0, conduce allo sviluppo di Puiseux di una delle coordinate x, y del punto generico della curva X in serie di potenze fratte dell'altro [1], [2], [4]. Precisamente, dal ragionamento esposto nella prima parte, risulta l'esistenza di un intero $n > 1$, tale che, ponendo $\overset{0}{g}(x, y_0) = g(x, y)$, nella successione

$$\overset{0}{g}(x, y_0), \overset{1}{g}(x, y_1), \cdots, \overset{n}{g}(x, y_n), \tag{9}$$

si abbia l'ord $\overset{i}{g}(x, y_i) = s$ per $i = 0, 1, \cdots, n - s$, ma l'ord $\overset{n}{g}(x, y_n)$ sia un intero s_1 strettamente minore di s.

Gli ultimi due termini della successione (9) avranno la forma

$$\overset{n-1}{g}(x, y_{n-1}) = (y_{n-1} + \alpha_n x)^s + x^2 \overset{n-1}{g_1}(x)(y_{n-1} + \alpha_n x)^{s-1} + \cdots$$

$$\cdots + x^s \overset{n-1}{g_s}(x)(y_{n-1} + \alpha_n x) + x^{r_{n-1}} \overset{n-1}{g_s}(x), \qquad \text{con } \overset{n-1}{g_s}(0) \neq 0$$

e $$\overset{n}{g}(x, y_n) = y_n^s + x \overset{n-1}{g_1}(x) y_n^{s-1} + \cdots + x \overset{n-1}{g_{s-1}}(x) y_n + x^{r_{n-1}-s} \overset{n-1}{g_s}(x).$$

L'ordine s_1 della serie $\overset{n}{g}(x, y_n)$ è strettamente minore di s, per la scelta di n. Quindi la somma dei termini di grado minimo, di questa serie, è un polinomio omogeneo di grad s_1 in x ed y_n, divisibile per x. Siccome $\overset{n}{g}(x, y_n)$ è irriducibile, questo polinomio deve essere della forma ax^{s_1}; dunque uguale a $x^{r_{n-1}-s} \overset{n-1}{g_s}(0)$, sicché $r_{n-1} - s = s_1$.

Il lemma di Weierstrass, applicato alla serie $\overset{n}{g}(x, y_n)$, questa volta rispetto alla variabile x, assicura l'esistenza di una serie invertibile $v \in C[[x, y_n]]$, tale che si possa scrivere

$$h(x, y_n) = v\overset{n}{g}(x, y_n) = x^{s_1} + y_n^2 h_1(y_n) x^{s_1-1} + \cdots \tag{10}$$

$$\cdots + y_n^{s_1} h_{s-1}(y_n) x + y_n^s h_s(y_n), \qquad \text{con } h_s(0) \neq 0.$$

Rifacendo, sulla serie $\overset{0}{h}(x_0, y_n) = h(x, y_n)$, il ragionamento fatto sulla $g(x, y)$, troveremo un intero $m \geq 1$ ed una successione

$$\overset{0}{h}(x_0, y_n), \overset{1}{h}(x_1, y_n), \cdots, \overset{m-1}{h}(x_{m-1}, y_n), \overset{m}{h}(x_m, y_n),$$

analoga alla (9) e tale che l'ord $\overset{i}{h}(x_i, y_n) = s_1$ per $i = 0, \cdots, m - 1$, mentre l'ordine di $\overset{m}{h}(x_m, y_n)$ sarà un intero s_2, strettamente minore di s_1.

Risulterà, allo stesso modo, che

$$\overset{m}{h}(0, y_n) = y_n^{s_2} \overset{m-1}{h_{s_1}}(y_n), \qquad \text{con } \overset{m-1}{h_{s_1}}(0) \neq 0.$$

Quindi ci sarà una serie invertibile $w \in \mathrm{C}\,[[x_m\,, y_n]]$, tale che si potrà scrivere

$$\begin{aligned}(11)\qquad l\,(x_m\,, y_n) &= w\overset{m}{h}\,(x_m\,, y_n) = y^{s_2} + x_m^2\, l_1\,(x_m)\, y_n^{s_r - 1} + \cdots \\ &\cdots + x_m^{s_2}\, l_{s_2-1}\,(x_m)\, y_n + x_m^{s_1}\, l_{s_2}\,(x_m)\,, \qquad \text{con} \quad l_{s_2}\,(0) \neq 0\,, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Procedendo, finché possibile, in questo modo, troveremo una successione di polinomi di Weierstrass

$$\begin{aligned}(12)\qquad \alpha_0\,(x\,, y) = g\,(x\,, y) \quad &, \quad \alpha_1\,(x\,, y_n) = h\,(x\,, y_n)\,, \\ \alpha_2\,(x_m\,, y_n) &= l\,(x_m\,, y_n)\,, \cdots, \alpha_r\,(x_\mu\,, y_\nu)\,,\end{aligned}$$

nella quale: $\alpha_0\,(x\,, y)$ è di grado s (in y), $\alpha_1\,(x\,, y_n)$ è di grado s_1 (in x), $\alpha_2\,(x_m\,, y_n)$ è di grado s_2 (in y_n) etc.

Gli interi $s\,, s_1\,, s_2\,, \cdots$, diversi fra loro, costituiscono una successione finita, discendente, $s > s_1 > s_2 > \cdots$ avente, dunque, al più s termini. L'ultimo termine di questa successione sarà $s_r = 1$ (altrimenti il ragionamento verrebbe continuato). Corrispondentemente, l'ultimo termine della successione (12) sarà $\alpha_r\,(x_\mu\,, y_\nu)$, della forma

$$x_\mu + a_1\, y_\nu + a_2\, y_\nu^2 + \cdots,$$

o della forma

$$y_\nu + a_1\, x_\nu + a_2\, x_\mu^2 + \cdots.$$

Ponendo, nella serie $\alpha_r\,(x_\mu\,, y_\nu)$,

$$(13)\quad y_\nu = t \;\;,\;\; x_\mu = -\, a_1\, t - a_2\, t^2 - \cdots \quad \text{o} \quad x_\mu = t \;\;,\;\; y_\nu = -\, a_1\, t - a_2\, t^2$$

a seconda del caso, questa serie diventa uguale a zero.

Ricordando le relazioni quadratiche che passano tra le variabili $x\,, y\,, \cdots, x_m\,, y_n\,, \cdots, x_\mu\,, y_\nu\,,$ e cioè

$$\begin{aligned}(14)\qquad & y + \alpha_1\, x = x y_1\,, \cdots, y_{n-1} + \alpha_n\, x = x y_n\,, x + \beta_1\, y_n = x_1\, y_1\,, \cdots \\ & \cdots, x_{m-1} + \beta_m\, y_n = x_m\, y_n\,, \cdots, x_{\mu-1} + \gamma_\mu\, y_\nu = x_\mu\, y_\nu \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{o} \quad y_{\nu-1} + \delta_\nu\, x_\mu = x_\mu\, y_\nu)\,,\end{aligned}$$

e risalendo a $x\,, y$, troveremo due serie

$$\begin{aligned}(15)\qquad x &= c_\varrho\, t^\varrho + c_{\varrho+1}\, t^{\varrho+1} + \cdots \\ y &= \mathrm{d}_\sigma\, t^\sigma + \mathrm{d}_{\sigma+1}\, t^{\sigma+1} + \cdots\end{aligned}$$

le quali, sostituite al posto di $x\,, y$ nella $g\,(x\,, y)$, la rendono uguale a zero; e ciò in quanto, nell'anello $\mathrm{C}\,[[x_\mu\,, y_\mu]]$, la $g(x\,, y)$ è divisibile per $\alpha_r\,(x_\mu\,, y_\nu)$, la quale si annulla quando si sostituiscono le serie t e $-\, a_1\, t - a_2\, t^2 \cdots$, al posto di $x_\mu\,, y_\nu$ o al posto di $y_\nu\,, x_\mu\,,$ secondo il caso.

Ponendo $c_\varrho\, t^\varrho + c_{\varrho+1}\, t^{\varrho+1} + \cdots = \tau^\varrho$, e poggiando sul lemma di Hensel, deduciamo che si può scrivere $t = \gamma_1\, \tau + \gamma_2\, \tau^2 + \cdots$. Quindi al posto delle (15) si troveranno le

$$(17) \qquad \begin{aligned} x &= \tau^{\varrho} \\ y &= \varepsilon_{\sigma}\, \tau^{\sigma} + \varepsilon_{\sigma+1}\, \tau^{\sigma+1} + \cdots, \end{aligned}$$

le quali costituiscono proprio lo sviluppo di Puiseux di una funzione algebrica y di x [1].

Dalle formule (14), risulta $\sigma = \operatorname{ord} y > \operatorname{ord} x = \rho$. Considerando l'intersezione della curva algebroide X con una retta qualunque, passante per l'origine, $Ax + By = 0$ [5], otteniamo

$$\rho = \operatorname{ord}\,[A\tau^{\varrho} + B\,(\varepsilon_{\sigma}\,\tau^{\sigma} + \cdots)] = s\,.$$

L'esponente σ ed i coefficienti $\varepsilon_{\sigma}, \varepsilon_{\sigma-1}, \cdots$ hanno anch'essi significato intrinseco, in relazione alla molteplicità d'intersezione della X con diverse curve passanti semplicemente per l'origine ed aventi ivi contatti di vari ordini con la X.

3. Supponiamo sempre la X irriducibile, definita dalla serie

$$g_0(x, y) = g(x, y) = (y + \alpha_1 x)^s + x^2 g_1(x)(y + \alpha_1 x)^{s-1} + \cdots$$
$$\cdots + x^s g_{s-1}(x)(y + \alpha_1 x) + x^{s+1} g_s(x)\,.$$

La successione (9), in cui il termine $\overset{i}{g}(x, y_i)$ si deduce dal precedente mediante la sostituzione $y_{i-1} + \alpha_i x = xy_i$ $(y_0 = y)$, ha l'ultimo termine

$$\overset{n}{g}(x, y_n) = y_n^s + x\overset{n-1}{g_1}(x)\, y_n^{s-1} + \cdots + x\overset{n-1}{g_{s-1}}(x)\, y_n + x^{s_1}\overset{n-1}{g_s}(x),$$

con $s_1 < s \neq s_1$ e $\overset{n-1}{g_s}(0) \neq 0$.

Risalendo alle variabili x, y, possiamo scrivere

$$g(x, y) = (y + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n)^s + x^{n+1}\overset{n-1}{g_1}(x)(y + \alpha_1 x + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_n x^n)^{s-1} + \cdots + x^{n(s-1)+1}\overset{n-1}{g_{s-1}}(x)(y + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) + x^{ns+s_1}\overset{n-1}{g_s}(x)\,.$$

Se Y è un'altra curva algebroide, passante semplicemente per l'origine, cioè definita da una serie $y + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots$, l'origine conta, nell'intersezione delle curve x ed y, con una molteplicità $\leq ns + s_1$, la quale si calcola sostituendo in $g(x, y)$, al posto di y, la serie $-\beta_1 x - \beta_2 x^2 \cdots$ ed esaminando l'ordine della serie ottenuta [5].

Il massimo $ns + s_1$ è raggiunto se, e solamente se, $\beta_1 = \alpha_s, \cdots, \beta_n = \alpha_n$. Pertanto la parabola di equazione

$$y + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0$$

è *la più semplice* curva algebrica, non singolare nell'origine, avente ivi, il contatto di ordine massimo con la curva algebroide X.

Considerando la curva algebroide $\overset{n}{X}$, definita dalla serie $h(x, y_n)$, e le trasformate monoidali successive di $\overset{n}{X}$, definite dalle serie $\overset{1}{h}(x_1, y_n), \cdots$ $\cdots, \overset{m-1}{h}(x_{m-1}, y_n)$, si conclude che si può scrivere

$$h(x, y_n) = (x + \beta_1 y_n + \cdots + \beta_m y_n^m)^{s_1} + y_n^{m+1} \overset{m-1}{h_1}(x)(x + \beta_1 y_n + \cdots$$
$$\cdots + \beta_m y_n^m)^{s_1 - 1} + \cdots + y_n^{m(s_1-1)+1} \overset{m-1}{h}_{s_1-1}(y_n)(x + \beta_1 y_n + \cdots + \beta_m y_n^m) +$$
$$+ y_n^{ms_1+s_2} \overset{m-1}{h}_{s_1}(y_n), \qquad \text{con} \quad \overset{m-1}{h}_{s_1}(0) \neq 0 .$$

Ritornando alle variabili x, y tramite le sostituzioni quadratiche

$$y_{i-1} + \alpha_i x = x y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, y_0 = y,$$

dalle curve

$$x + \beta_1 y_n = 0 \quad , \quad x + \beta_1 y_n + \beta_2 y_n^2 = 0, \cdots, x + \beta_1 y_n + \cdots + \beta_m y_n^m = 0,$$

si deducono curve passanti per l'origine della X, aventi ivi un punto semplice, rispettivamente doppio, m–uplo, ed un contatto con X di ordine crescente; tali curve contengono non solamente i punti *infinitamente vicini* all'origine sulla X, ma anche i *punti prossimi* ed i punti infinitamente vicini a questi [1], [3].

BIBLIOGRAFIA.

[1] ENRIQUES F. e CHISINI O., *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II. Zanichelli, Bologna 1918.

[2] HAMBURGER M., *Ueber die Entwickelung algebraischer Funktionen in Reihen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1879.

[3] NOETHER M., *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Funktion und die singulären Punkten einer algebraischen Curve*, Math. Annalen, B IX, 1876.

[4] SEVERI FR., *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, p. I. Zanichelli, Bologna 1926.

[5] ZARISKI O., *Studies on equisingularity I–III*, American Journal of Mathematics, vol. 87 (1965, 1968).