Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ezio Stagnaro

Sopra alcune estensioni delle nozioni di dipendenza integrale e di fattorialità, ed applicazioni geometriche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.6, p. 589–594.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_6_589_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Geometria. — *Sopra alcune estensioni delle nozioni di dipendenza integrale e di fattorialità, ed applicazioni geometriche* (*). Nota di EZIO STAGNARO, presentata (**) dal Socio E. G. TOGLIATTI.

SUMMARY. — We first introduce a new type of dependence on a ring and we study the "algebraic and geometric" properties of a ring containing any element depending on it.

We then study the properties of the coordinate ring of an affine variety V such that any subvariety W of V which is a set-theoretic complete intersection is also an algebraic complete intersection.

Finally we consider three extensions of UFD rings. These extensions, besides originating new interesting problems, allow us to generalize many results chiefly concerning the cohomological dimension of algebraic varieties, in which the condition UFD is generally assumed.

1. Il proposito di caratterizzare gli anelli delle coordinate di varietà algebriche affini e irriducibili, definite su un campo k algebricamente chiuso, sopra le quali ogni sottovarietà irriducibile di codimensione 1 che sia intersezione completa dal punto di vista insiemistico risulti anche una intersezione completa in senso algebrico, ha dato origine ad alcuni miei lavori in corso di pubblicazione. Non mi sembra inutile presentare qui riuniti i principali risultati ottenuti.

2. In primo luogo è stato necessario generalizzare la nozione di dipendenza integrale sopra un anello A, introducendo un tipo di dipendenza più debole che ho chiamato *dipendenza p–integrale* in quanto nella sua definizione interviene un certo intero p. Per $p = 0$ e se l'anello A è noetheriano si ritrova l'ordinaria dipendenza integrale.

Accanto alla dipendenza p-integrale, ho introdotto *la chiusura p–integrale* di un anello e una *p–normalizzazione* di una varietà algebrica affine irriducibile, estendendo in modo naturale le nozioni di chiusura integrale e di normalizzazione.

La ricerca di p–normalizzazioni di una varietà algebrica affine e irriducibile V mi ha condotto al problema di associare a V una varietà affine e irriducibile V′, che chiameremo *una fattorializzazione di* V, birazionalmente equivalente a V e tale che k [V′] risulti fattoriale; tra l'altro indico una notevole classe di varietà affini per le quali si riesce a costruire effettivamente una fattorializzazione.

In questo primo ordine di idee i fatti più significativi sono i seguenti.

Siano A un anello commutativo con identità ed A′ un sopraanello di A commutativo avente la stessa identità di A.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Contratti di Ricerca del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1970.

DEFINIZIONE 1. Un elemento $x \in A'$ si dice *p–intero su* A se soddisfa ad una equazione della forma:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-p-1} + \cdots + a_{n-p} = 0 \qquad (n > p \geq 0 \, , \, a_i \in A)$$

con a_0 elemento non nullo e dotato di una fattorizzazione che contenga al più p fattori irriducibili di A.

DEFINIZIONE 2. *Chiusura p–integrale di* A *in* A′ è l'intersezione di tutti gli anelli che contengono l'insieme degli elementi di A′ che sono p–interi su A. Qualora la chiusura p–integrale di A in A′ coincida con A dico che A *è p–integralmente chiuso in* A′; se A è un dominio di integrità e A′ è il campo dei quozienti di A dico semplicemente che A *è p–integralmente chiuso.*

PROPOSIZIONE 1. *Sia* A *un dominio p–integralmente chiuso (nel suo campo dei quozienti). Se si ha* $x^{p+1} = y_1 \cdots y_r$ *con* $x \, , y_i$ *elementi irriducibili di* A, $p + 1$ *ed r interi* > 1, *risulta* $p + 1 = r$ *ed inoltre x ed* y_i *sono associati per ogni i.*

PROPOSIZIONE 2. *Sia* A *un dominio noetheriano ed esista un intero* ν *tale che* A *sia p–integralmente chiuso per ogni* $p > \nu$. *Se* $a \in A$ *è tale che* $\sqrt{(a)}$ *sia un ideale primo, allora esiste un elemento* $b \in A$ *tale che* $\sqrt{(a)} = (b)$.

PROPOSIZIONE 3. *Se esiste un intero* ν *tale che per ogni* $p > \nu$ *l'anello delle coordinate di una varietà affine e irriducibile* V *sia un dominio p–integralmente chiuso e se* W, *irriducibile e di codimensione* 1 *in* V, *è intersezione completa di* V *in senso insiemistico, allora* W *è anche intersezione completa in senso algebrico.*

PROPOSIZIONE 4. *Se* A *è un anello locale di dimensione* 1, *allora sono condizioni equivalenti le seguenti*:

(1) A *è un dominio (noetheriano) p–integralmente chiuso per* $p > \nu$,
(2) A *è regolare.*

DEFINIZIONE 3. Una *p–normalizzazione di una varietà affine e irriducibile* V è una varietà affine e irriducibile V′ birazionalmente equivalente a V ed avente il dominio delle coordinate $k\,[V']$ p–integralmente chiuso.

Esempio. $A = k\,[X \, , Y \, , Z]/(XY - Z^2) = k\,[x \, , y \, , z]$. È noto che gli elementi $x \, , y \, , z$, classi modulo l'ideale $(XY - Z^2)$ di X, Y, Z, sono irriducibili e non associati fra loro. L'uguaglianza:

$$x^p \left(\frac{z}{x}\right)^{p+1} - yz^{p-1} = 0$$

dice che $\frac{z}{x}$ è p–intero su A per ogni $p > 0$; inoltre $\frac{z}{x} \notin A$. Si trova che $A' = k\left[x \, , y \, , z \, , \frac{z}{x}\right] \cong k\,[X_1 \, , X_2 \, , X_3 \, , X_4]/(X_2 - X_4 X_3 \, , X_1 X_4 - X_3)$ è la chiusura p–integrale di A per ogni $p > 0$. La varietà irriducibile associata all'ideale $(X_2 - X_4 X_3 \, , X_1 X_4 - X_3)$ è, per ogni $p \geq 0$, una p–normalizzazione del cono $xy - z^2 = 0$.

3. La proposizione 3, nella quale l'ipotesi di irriducibilità di W gioca un ruolo essenziale, suggerisce lo studio delle varietà affini irriducibili sulle quali ogni sottovarietà pura (anche riducibile e di codimensione qualunque) che sia intersezione completa dal punto di vista insiemistico lo sia anche dal punto di vista algebrico.

DEFINIZIONE 4. Un anello A commutativo con identità e noetheriano si dice *p-fattoriale* se per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A di altezza p per il quale $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \cdots, a_p)}$ $(a_i \in \mathrm{A})$ esistono $b_1, \cdots, b_p \in \mathrm{A}$ tali che $\sqrt{\mathfrak{a}} = (b_1, \cdots, b_p)$.

Si può osservare che se A è un dominio noetheriano fattoriale, allora R è 1-fattoriale, ma non necessariamente p-fattoriale per $p > 1$. Si prova con esempi l'esistenza di domini p-fattoriali per ogni p e non fattoriali (vedi prop. 8).

PROPOSIZIONE 5. *Ogni dominio 1-fattoriale, è integralmente chiuso.*

PROPOSIZIONE 6. *In un dominio* A *1-fattoriale un'uguaglianza della forma* $x^n = y_1 \cdots y_s$ *con* x, y_i *irriducibili* (n, s *interi* > 0), *implica* $n = s$ *ed* x *associato con ogni* y_i.

PROPOSIZIONE 7. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un anello locale di dimensione* p *sia regolare é che sia* p*-fattoriale.*

COROLLARIO. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un anello locale di dimensione* ≤ 2 *sia regolare è che sia* p*-fattoriale per ogni intero* $p > 0$.

Tenendo conto del fatto ben noto (e del quale comunque indico una prova valida sopra un campo k algebricamente chiuso e di caratteristica $\neq 2$) che nello spazio proiettivo P_3^k una curva C è la completa intersezione, in senso algebrico, di una quadrica Q con un'altra superficie se e solo se essa è incontrata in uno stesso numero di punti da ogni generatrice di Q non contenuta interamente in C, si ha:

PROPOSIZIONE 8. *L'anello delle coordinate affini di una quadrica non specializzata dello spazio affine* A_3^k (k *algebricamente chiuso e di caratteristica* $\neq 2$) *è* p*-fattoriale per ogni intero* $p > 0$ (*ma, in generale, non fattoriale*).

4. Nei nn. 2 e 3 ho considerato solo varietà affini irriducibili sulle quali ogni intersezione completa in senso insiemistico lo sia anche in senso algebrico. È allora naturale approfondire lo studio delle varietà affini irriducibili sulle quali ogni sottovarietà sia intersezione completa in senso insiemistico.

Questo problema conduce innanzitutto a varie estensioni della nozione di dominio fattoriale (brevemente UFD). Ho indicato tre modi diversi di estendere tale nozione introducendo i domini che ho chiamato $\mathrm{C_1\,FD}$, $\mathrm{C_2\,FD}$, $\mathrm{C_3\,FD}$.

La definizione dei domini $\mathrm{C}_i\,\mathrm{FD}$ è alquanto complicata; mi limito qui ad indicare una loro caratterizzazione nel caso noetheriano.

Per un dominio noetheriano A

– $\mathrm{C_1\,FD}$ significa che per qualunque non unità a di A, esiste $b \in \mathrm{A}$ tale che $a \in \sqrt{(b)}$ con $\sqrt{(b)}$ ideale primo.

– C_2 FD significa che per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A altezza 1 con $\sqrt{\mathfrak{a}}$ puro, si ha $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a)}$, $a \in A$.

– C_3 FD significa che per ogni elemento irriducibile $a \in A$, $\sqrt{(a)}$ è ideale primo.

Chiaramente se A è un dominio noetheriano si ha che UFD $\Rightarrow C_3$ FD $\Rightarrow$ $\Rightarrow C_2$ FD $\Rightarrow C_1$FD. Con esempi si dimostra che C_2FD $\not\Rightarrow C_3$FD, C_3FD $\not\Rightarrow$ UFD.

Se A è l'anello delle coordinate di una varietà affine e irriducibile V, il significato geometrico (per altro ovvio) dell'essere k [V] (k algebricamente chiuso) C_1 FD oppure C_2 FD oppure C_3 FD è il seguente

– k [V] C_1 FD significa che ogni sottovarietà W di V definita da un ideale principale di K [V] ha una componente irriducibile che è intersezione completa dal punto di vista insiemistico.

– k [V] C_2 FD significa che ogni sottovarietà W di V pura e di codimensione 1 in V è intersezione completa dal punto di vista insiemistico.

– k [V] C_3 FD significa che ogni elemento irriducibile di k [V] definisce una sottovarietà irriducibile di V.

DEFINIZIONE 5. Diremo che una varietà affine e irriducibile V *verifica* C_i FD se k [V] è un C_i FD.

Si ha poi:

PROPOSIZIONE 9. *Se* A *è un* C_2 FD (C_3 FD) *anche l'anello* A_S *dei quozienti di* A *rispetto ad un dato sistema moltiplicativo* S *è un* C_2 FD (C_3 FD).

Osserviamo che in un dominio locale noetheriano di dimensione 1 le condizioni C_i FD sono sempre verificate.

PROPOSIZIONE 10. *Sia* A *un dominio noetheriano* C_2 FD *oppure* C_3 FD. *Se* $\sqrt{(a)}$ $(a \in A)$ *è un ideale primo di* A con *a irriducibile in* A, *allora* (a^n) *è un ideale primario per ogni intero* $n > 0$.

Molti dei risultati ottenuti per varietà affini si estendono al caso proiettivo, ove si incontrano anche questioni nuove. Definisco in modo naturale le varietà proiettive C_i FD (limitandomi qui ai casi $i = 1, 2$) a partire dal significato geometrico dianzi menzionato per il caso affine:

DEFINIZIONE 6. Diremo che una varietà proiettiva e irriducibile V *verifica* C_1 FD se ogni sottovarietà W di V definita da un ideale principale di k [V] ha una componente irriducibile che sia intersezione completa dal punto di vista insiemistico.

DEFINIZIONE 7. Diremo che una varietà proiettiva e irriducibile V *verifica* C_2 FD se ogni sottovarietà W di V pura e di codimensione 1 in V è intersezione completa dal punto di vista insiemistico.

Tra l'altro:

PROPOSIZIONE 11. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una curva irriducibile di* P_n^k (k *alg. chiuso e di car.* $= 0$) *verifichi* C_2 FD *è che essa sia razionale non singolare.*

La stessa proposizione sussiste anche per curve affini: ma è noto che le curve affini razionali non singolari sono addirittura fattoriali, sicché:

PROPOSIZIONE 12. *Per una curva affine irriducibile su* k: C_2 FD $\Longleftrightarrow$ UFD.

È interessante notare che per numerose questioni riguardanti la dimensione coomologica $cd(Y)$ e il numero $q(Y)$ (1) associati ad un sottoinsieme chiuso oppure aperto Y di una varietà algebrica X (2) e nelle quali si fanno abitualmente ipotesi di fattorialità, ciò che interviene è soltanto la proprietà C_2 FD. Si ha:

PROPOSIZIONE 13. *Sia* $X = Spec(R)$, *con* R *una* k*–algebra di tipo finito su* k (*algebricamente chiuso*), *ed inoltre* R *sia un* C_2 FD. *Se* $Z \subset X$ *è un sottoinsieme chiuso puro di codimensione* 1 *in* X, *allora per calcolare* $cd(Z)$, $q(Z)$, $cd(X-Z)$, $q(X-Z)$ *possiamo supporre che* Z *sia intersezione completa in senso algebrico. In particolare* $cd(X-Z) = q(X-Z) = 0$.

DEFINIZIONE 8. Sia X una varietà algebrica. Se per ogni $x \in X$, l'anello locale (noetheriano) ϱ_x è un C_2 FD, diremo che la varietà X *verifica localmente* C_2 FD o più semplicemente che X *è semifattoriale*. (In analogia con le varietà fattoriali che sono le varietà algebriche Y tali che ϱ_y è un UFD, per ogni $y \in Y$).

Ogni curva algebrica X è semifattoriale.

PROPOSIZIONE 14. *Se* X *è una varietà algebrica semifattoriale, allora per ogni sottoinsieme chiuso puro* $Z \subset X$ *di codimensione* 1 *in* X, *esistono un ricoprimento aperto affine* $\{U_i\}_{i \in I}$ *di* X *ed elementi* $f_i \in \Gamma(U_i, \varrho_X)$ *tali che* $\mathfrak{V}((f_i)) = Z \cap U_i$ *per ogni* i.

Osserviamo che affinché sia vera la prop. 14 basta che siano C_2 FD gli anelli locali ϱ_x, con x punto chiuso di X.

COROLLARIO. *Data una varietà semifattoriale* X *per calcolare* $cd(Z)$, $q(Z)$, $cd(X-Z)$, $q(X-Z)$, *dove* $Z \subset X$ *è un sottoinsieme chiuso puro di codimensione* 1 *in* X, *possiamo supporre che* Z *sia localmente intersezione completa in senso algebrico.*

Tenendo conto di recenti risultati di R. Hartshorne (3) si ha infine che

PROPOSIZIONE 15. *Se* X *è uno schema affine tale che ogni anello locale* ϱ_x, $x \in X$, *sia un* C_2 FD *e se* $Z \subset X$ *è un sottoinsieme chiuso puro di codimensione* 1 *in* X, *allora* $X - Z$ *è affine.*

PROPOSIZIONE 16. *Sia* X *una varietà proiettiva di codimensione* p *in* P_n^k (k *algebricamente chiuso*) *intersezione completa dal punto di vista insiemistico che verifichi* C_2 FD *e sia* Z *un sottoinsieme chiuso puro di codimensione* 1 *in* X.

(1) Ricordo che se X è uno schema di tipo finito su k (algebricamente chiuso) si indica con $q(X)$ il più piccolo intero $n \geq -1$ tale che $H^i(X, \mathfrak{F})$ sia uno spazio vettoriale (su k) di tipo finito, per ogni $i > n$ e per ogni fascio coerente $\mathfrak{F}$ su X.

(2) Cioè X è uno schema ridotto e irriducibile di tipo finito su k (algebricamente chiuso).

(3) Cfr. R. HARTSHORNE, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, « Annals of Math. », Serie II, Vol. 88, (1968), 401–450.

Allora:

1) $cd\,(P_n^k - X) = q\,(P_n^k - X) = p - 1$

$cd\,(P_n^k - Z) = q\,(P_n^k - Z) = p$;

2) *se dim* $X \geq 1$, X *è connesso in codimensione* 1 *e se dim* $Z \geq 1$ *pure* Z *è connesso in codimensione* 1;

3) *se* $k = \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ = *campo complesso*) *e dim* $X \geq 2$, *Pic*(X) *è un gruppo abeliano finitamente generato, e così pure Pic* (Z) *se dim* $Z \geq 2$.

5. Sono molti i problemi che restano ancora aperti; mi sembrano particolarmente interessanti i seguenti.

I. Decidere se p-integralmente chiuso per ogni intero $p \geq 0$ implichi UFD. (Si vede facilmente che viceversa gli anelli noetheriani UFD sono p-integralmente chiusi per ogni $p \geq 0$).

II. Stabilire se ogni varietà algebrica affine e irriducibile sia p-normalizzabile oppure fattorializzabile, o per lo meno assegnare delle condizioni sufficienti affinché lo sia.

III. L'ipotesi che A sia C_i FD implica che anche A [X] sia C_i FD?

IV. Sia V una varietà proiettiva irriducibile che verifichi C_i FD e che sia aritmeticamente normale: k[V] è un C_i FD?

V. Una varietà algebrica irriducibile affine o proiettiva che verifichi C_i FD può avere singolarità in codimensione 1? Tutti gli esempi di cui dispongo lascerebbero sospettare una risposta negativa.

VI. Gli esempi che ho potuto approfondire autorizzano la congettura che ogni varietà algebrica irriducibile affine o proiettiva che verifichi C_1 FD verifichi anche C_2 FD. Decidere sulla questione non sembra agevole.