Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marcello Cicchese

Sulle cubiche di un piano lineare $S_{2,q}$, con $q \equiv 1 \pmod 3$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.6, p. 584–588.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_6_584_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Geometria. — *Sulle cubiche di un piano lineare* $S_{2,q}$, *con* $q \equiv 1 \pmod 3$. Nota di MARCELLO CICCHESE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A number of results are given (without proof) concerning the cubic curves of a Galois plane $S_{2,q}$, with $q \equiv 1 \pmod 3$.

INTRODUZIONE.

Nella presente Nota mi propongo di riassumere e di illustrare brevemente i principali risultati da me conseguiti sulle cubiche di un piano lineare $S_{2,q}$, sopra un campo finito GF(q), di caratteristica p, tale che

$$p > 3 \quad , \quad q \equiv 1 \pmod 3 .$$

Lo studio di tali curve rappresenta, in un certo senso, la prosecuzione e il compimento di un mio precedente lavoro ([2]) sulle cubiche di un piano $S_{2,q}$ con $q \equiv -1 \pmod 3$.

La diversità tra le due ipotesi sull'ordine di GF(q) è stata già sottolineata nella Nota [1]; aggiungerò qui che è di fondamentale importanza un risultato di B. Segre ([9], n. 25), secondo cui un polinomio di quarto grado equianarmonico a coefficienti in GF(q) ammette o zero o due radici in GF(q) se $q \equiv -1 \pmod 3$, mentre ammette o una o quattro radici in GF(q) se $q \equiv 1 \pmod 3$. È opportuno inoltre rilevare che un piano $S_{2,q}$, con $q \equiv -1 \pmod 3$, è, per così dire, « in equilibrio instabile », nel senso che in una qualsiasi estensione di grado pari di GF(q) l'ipotesi fatta cessa di valere, e vengono quindi a cadere i risultati ottenuti sotto tale ipotesi. È chiaro invece che una tale situazione non si verifica se $q \equiv 1 \pmod 3$.

I risultati più rilevanti della trattazione sono quelli che riguardano i numeri dei punti delle varie cubiche e le trasformazioni birazionali delle cubiche prive di flessi. In particolare, viene dimostrato (e per la comprensione dell'importanza di tale conclusione si veda la Nota [1]), anche nelle presenti ipotesi, che una cubica priva di flessi in GF(q) si spezza in tre rette di GF(q^3) fra loro coniugate.

È bene però far notare che la trattazione ha carattere organico, e che ai risultati sopra accennati non si sarebbe potuto pervenire senza uno studio particolareggiato dei flessi, delle omografie, degli invarianti di una cubica.

1. Una cubica (1) di $S_{2,q}$ possiede, nella chiusura algebrica di GF(q), nove flessi, per i quali passano quattro trilateri inflessionali. Denoterò, nel

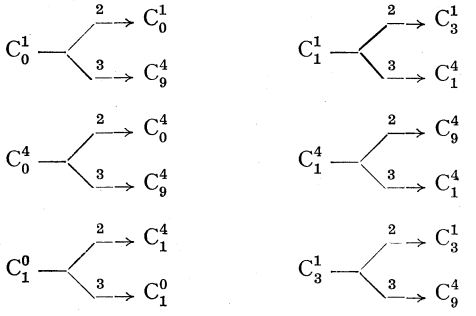
(*) Nella seduta del 13 giugno 1970.

(1) Salvo esplicito avviso in contrario, sottintenderò sempre che si tratti di una cubica ellittica.

seguito, con C_h^k una cubica avente h flessi reali (2) e k trilateri inflessionali reali; mentre scriverò A_h^k o E_h^k se la cubica è armonica o equianarmonica.

Ho stabilito anzitutto che *le cubiche di* $S_{2,q}$ *possono essere soltanto dei seguenti tipi*: C_9^4, C_3^1, C_1^4, C_1^1, C_1^0, C_0^4, C_0^1.

Ho poi esaminato il *comportamento delle cubiche rispetto alle estensioni quadratiche e cubiche*; esso può essere riassunto dalla seguente tabella:



dove, ad esempio, il primo diagramma in alto a sinistra sta a significare che una C_0^1 di $S_{2,q}$ resta una C_0^1 in S_{2,q^2} e diventa una C_9^4 in S_{2,q^3}.

2. Per ogni cubica generale (cioè che non sia né armonica né equianarmonica) esistono, nella chiusura algebrica di $GF(q)$, esattamente 18 omografie del piano che la lasciano fissa. Se la cubica è armonica ne esistono 36, e se è equianarmonica 54. Per ogni tipo di cubica ho determinato il numero delle *omografie sul campo base che la trasformano in sé*, e i risultati cui sono pervenuto sono espressi dalla seguente tabella:

	gener.	equian.	arm.
C_9^4	18	54	36
C_3^1	6	18	
C_1^4	2	6	4
C_1^1	2	6	
C_1^0	2		2 | 4
C_0^4	9	9 | 27	9
C_0^1	3	9	

dove i due numeri riguardanti le C_0^4 equianarmoniche sono relativi a due diversi tipi di E_0^4, mentre i due numeri riguardanti le C_1^0 armoniche corrispondono, nell'ordine, al caso $q \not\equiv 1 \pmod 4$ e al caso $q \equiv 1 \pmod 4$.

(2) Dirò che un ente geometrico è « reale » se appartiene a $S_{2,q}$.

3. Per le cubiche aventi almeno un flesso reale ho introdotto la nozione, utilmente usata nel seguito, di *cubiche complementari*, definendo che due cubiche generali aventi almeno un flesso reale sono complementari se i loro invarianti assoluti sono uguali, mentre sono diversi i caratteri quadratici degli invarianti relativi di sesto grado.

Estendendo opportunamente tale definizione alla cubiche non generali, ho potuto stabilire che:

per ogni tipo proiettivo di cubica avente almeno un flesso reale esiste uno ed un sol tipo proiettivo di cubica ad esso complementare;

due cubiche complementari hanno il medesimo numero di trilateri inflessionali reali;

se h_1, h_2 *indicano i numeri dei flessi reali di due cubiche complementari e* k *il numero (comune) dei loro trilateri inflessionali reali, si ha*: $h_1+h_2=2k+2$;

se N_1 e N_2 *indicano i numeri dei punti reali di due cubiche complementari, si ha*: $N_1 + N_2 = 2q + 2$.

4. Sulle cubiche prive di flessi reali ho potuto stabilire i seguenti risultati:

ogni C_0^4 *può sempre trasformarsi, mediante un'opportuna trasformazione quadratica reale, in una* C_9^4, *e viceversa*;

ogni C_0^1 *può sempre trasformarsi, mediante un'opportuna trasformazione quadratica reale, in una* C_3^1, *e viceversa.*

Una conseguenza importante dei suddetti teoremi è che ogni cubica ellittica ha almeno un punto reale: ne discende che *una cubica priva di punti reali deve necessariamente spezzarsi in tre rette coniugate di* S_{2,q^3}.

Ho anche trovato, servendomi delle suddette trasformazioni quadratiche, *equazioni canoniche* per tutti i tipi di cubiche prive di flessi reali.

5. Di ciascun modello di cubica ho determinato il numero dei *tipi proiettivamente distinti*. I risultati raggiunti sono espressi dalle due seguenti tabelle.

Se $q \not\equiv 1 \pmod 4$:

	generali	equianarm.	armoniche	totale
C_9^4	$(q-7)/12$	1	0	$(q+5)/12$
C_3^1	$2(q-1)/3$	2	0	$2(q+2)/3$
C_1^4	$(q-7)/12$	1	0	$(q+5)/12$
C_1^1	$2(q-1)/3$	2	0	$2(q+2)/3$
C_1^0	$(q-3)/2$	0	2	$(q+1)/2$
C_0^4	$(q-7)/3$	2	0	$(q-1)/3$
C_0^1	$2(q-1)/3$	2	0	$2(q+2)/3$

Se $q \equiv 1 \pmod 4$:

	generali	equianarm.	armoniche	totale
C_9^4	$(q-13)/12$	1	1	$(q+11)/12$
C_3^1	$2(q-1)/3$	2	0	$2(q+2)/3$
C_1^4	$(q-13)/12$	1	1	$(q+11)/12$
C_1^1	$2(q-1)/3$	2	0	$2(q+2)/3$
C_1^0	$(q-1)/2$	0	2	$(q+3)/2$
C_0^4	$(q-13)/3$	2	2	$(q-1)/3$
C_0^1	$2(q-1)/3$	2	0	$2(q+2)/3$

Facendo uso dei risultati riguardanti le omografie reali che lasciano fissa una cubica, e denotando con ω il numero delle omografie di $S_{2,q}$ in sé (cfr. [8], n. 169), ho potuto determinare il *numero complessivo* N_h^k di tutte le C_h^k di $S_{2,q}$, ottenendo (ciò che è degno di nota) valori uguali sia per $q \not\equiv 1 \pmod 4$ sia per $q \equiv 1 \pmod 4$. Più precisamente ho trovato che

$$N_9^4 = \frac{q-3}{216}\omega \quad ; \quad N_3^1 = \frac{q}{9}\omega \, ;$$

$$N_1^4 = \frac{q-3}{24}\omega \quad ; \quad N_1^1 = \frac{q}{3}\omega \, ;$$

$$N_1^0 = \frac{q+1}{4}\omega \quad ; \quad N_0^4 = \frac{q-3}{27}\omega \, ;$$

$$N_0^1 = \frac{2q}{9}\omega \, .$$

6. Relativamente alle cubiche singolari irriducibili ho potuto stabilire che:

esistono esattamente tre tipi proiettivamente distinti di cubiche irriducibili non cuspidate: una cubica con un punto doppio isolato e un flesso reale, una cubica nodata priva di flessi reali, una cubica nodata con tre flessi reali.

BIBLIOGRAFIA.

[1] CICCHESE M., *Sulle cubiche di un piano di Galois*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *32*, 38–42 (1962).

[2] CICCHESE M., *Sulle cubiche di un piano di Galois*, « Rend. di Mat. di Roma » (3–4), *24*, 291–330.

[3] CLEBSCH A., *Léçons sur la Géometrie*, Vol. II (Paris, Gauthier–Villars Imprimeur–Libraire 1880).

[4] DICKSON L. E., *Linear groups* (Leipzig, Teubner 1901).

[5] ENRIQUES F. e CHISINI O., *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Voll. I, II (Bologna, Zanichelli 1915).
[6] HASSE H., *Punti razionali sopra curve algebriche a congruenze*, Convegno 1939 (Roma, R. Acc. d'Italia 1943), 85–140.
[7] SEGRE B., *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. » (4), *48*, 1–96 (1959).
[8] SEGRE B., *Lectures on modern geometry* (Roma, Cremonese 1960).
[9] SEGRE B., *Arithmetische Eigenschaften von Galois Raümen. I*, « Math. Ann. » (3), *154*, 195–256 (1964).
[10] WEIL A., *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent* (Parigi, Hermann 1948), 70.
[11] ZARISKI O. e SAMUEL P., *Commutative Algebra*, Vol. I (Toronto, D. Nostrand Company 1958).