Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Rosa Maria Bianchini

Un teorema di punti fissi in uno spazio metrico completo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.6, p. 581–583.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_6_581_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Analisi funzionale. — *Un teorema di punti fissi in uno spazio metrico completo* (*). Nota di ROSA MARIA BIANCHINI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — A fixed point theorem for weakly densifying mappings of a complete metric space X in itself is given.

Sia (X, d) uno spazio metrico completo, T una trasformazione di X in sè. In questa Nota vogliamo dare una condizione sufficiente per l'esistenza di punti uniti $x = Tx$ per la trasformazione T. Premettiamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1. – Sia A un sottoinsieme limitato di uno spazio metrico (X, d). Si definisce, seguendo Kuratowski [1], il numero reale $\alpha(A)$ come l'estremo inferiore degli $\varepsilon > 0$ per i quali A ammette un ricoprimento finito di sottoinsiemi aventi diametro inferiore a ε.

Sono conseguenza immediata della definizione le seguenti proprietà:

a) se A e B sono sottoinsiemi limitati di X e $A \subset B$, si ha

$$\alpha(A) \leq \alpha(B)$$

b) se $\bar{A}$ indica la chiusura di A, allora $\alpha(\bar{A}) = \alpha(A)$;

c) $\alpha(A) = 0$ se e solo se A è precompatto.

DEFINIZIONE 2. – Una trasformazione continua di uno spazio metrico in sè, si dice *debolmente addensante* se per ogni sottoinsieme limitato $A \subset X$ tale che $\alpha(A) \neq 0$ ed inoltre $TA \subset A$, si ha

$$\alpha(TA) < \alpha(A) \tag{0.1}$$

Furi e Vignoli [2], [3], hanno studiato trasformazioni addensanti, cioè tali che (0.1) vale per ogni sottoinsieme limitato $A \subset X$ con $\alpha(A) \neq 0$, senza l'ulteriore condizione $TA \subset A$.

TEOREMA. *Sia* $T : X \to X$ *una trasformazione continua e debolmente addensante di uno spazio metrico in sè.* X *sia completo e limitato. Esista una funzione reale* $\varphi : X^2 \to R$ *tale che*:

i) $\varphi(x, y) = 0$ *implica* $x = y$;

ii) *la funzione* $g : X \to R$ *definita da* $g(x) = \varphi(x, Tx)$ *sia semicontinua inferiormente in* X;

iii) $g(Tx) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in X$.

Se $\inf\{g(x) : x \in X\} = 0$ *allora* T *ammette punti uniti.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei raggruppamenti di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1970.

Dim.: Se $x \in X$ per le ipotesi poste la successione $\{T^n x\}$ delle iterate di x è compatta. Infatti, posto $\theta(x) = \{T^n x : n = 1, 2, \cdots\}$, si ha $T[\theta(x)] \subset \theta(x)$ e $\alpha(T[\theta(x)]) = \alpha[\theta(x)]$ (vedi dimostrazione in [2]), perciò $\alpha(\theta(x)) = 0$. Quindi per ogni $x \in X$ l'insieme $L(x)$ dei punti limite della successione delle iterate è non vuoto.

Dimostriamo che $T[L(x)] = L(x)$. Infatti se $y \in L(x)$, $Ty \in L(x)$ per la continuità della trasformazione T; inoltre se $z \in L(x)$ esisterà una successione $\{T^{n_k} x\}$ convergente a z. Consideriamo la successione $\{T^{n_k - 1} x\}$; da essa possiamo estrarre una sottosuccessione $\{T^{n'_k - 1} x\}$ convergente verso un punto w. Per la continuità della T la successione $\{T^{n'_k} x\}$ converge a Tw, ma $\{T^{n'_k} x\}$ è una sottosuccessione di $\{T^{n_k} x\}$ quindi $\{T^{n'_k} x\}$ converge a z e per l'unicità del limite $z = Tw$, cioè $z \in T[L(x)]$.

Consideriamo l'insieme $L(X) = \bigcup_{x \in X} L(x)$; quest'insieme è relativamente compatto. Infatti

$$T[L(X)] = \bigcup_{x \in X} T[L(x)] = \bigcup_{x \in X} L(x) = L(X)$$

quindi

$$\alpha(T[L(X)]) = \alpha[L(X)]$$

cioè per le ipotesi poste $\alpha[L(X)] = 0$.

Da $g(Tx) \leq g(x)$ e dalla s.c.i. della g segue che se $y \in L(x)$, $g(y) \leq g(x)$, quindi $\inf_{x \in L(X)} g(x) = \inf_{x \in X} g(x) = 0$ ed essendo $L(X)$ precompatto e X completo, esisterà $z \in X$ tale che

$$g(z) = \inf_{x \in L(X)} g(x) = 0$$

cioè $\varphi(z, Tz) = 0$ che per le ipotesi poste sulla φ implica $z = Tz$.

Osservazione: Se la funzione $\varphi : X^2 \to R$ coincide con la metrica dello spazio X e se la trasformazione T è addensante, cioè se la (0.1) vale per ogni sottoinsieme $A \subset X$ con $\alpha(A) \neq 0$; allora la condizione

$$\inf_{x \in X} g(x) = 0$$

è di per sè sufficiente a garantire l'esistenza di punti uniti per la trasformazione T (cfr. [3]).

Dal teorema segue:

COROLLARIO: *Sia* $T : X \to X$ *una trasformazione continua dello spazio metrico completo* X *in sé tale che*:

i) *esista una funzione* $F : X^2 \to R$, *semicontinua inferiormente in* $X \times X$ *tale che* $F(Tx, Ty) < F(x, y)$, *per ogni* $x, y \in X$, $x \neq y$;

ii) T *sia debolmente addensante*.

Se esiste finito $\inf_{x \in X} F(x, Tx)$, *allora* T *ha uno ed un solo punto unito in* X.

Dim.: L'unicità segue immediatamente dalla condizione i). Proviamo l'esistenza. Definiamo in X^2 la seguente funzione: $\varphi(x, y) = 1/2\,[F(x, Tx) + F(y, Ty) - 2 \inf_{z \in X} F(z, Tz)]$. Ovviamente $\varphi(x, y) = 0$ implica che x e y sono punti di minimo di $F(x, Tx)$, ma i punti di minimo per $F(x, Tx)$ sono punti uniti per la trasformazione T. Infatti da $x \neq Tx$ segue

$$F(Tx, T^2 x) < F(x, Tx),$$

perciò, per la i) $\varphi(x, y) = 0$ implica $x = y$.

Inoltre dalla stessa definizione di g segue immediatamente che $\inf_{x \in X} g(x) = 0$ e $g(Tx) \leq g(x)$. Quindi, per il teorema dimostrato precedentemente, la T ammette punti uniti in X.

Questo corollario, nel caso in cui il funzionale $F(x, Tx)$ sia inferiormente limitato generalizza il teorema di Furi e Vignoli [2].

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. KURATOWSKI, *Topologie*, Warszawa, vol. I, 318 (1952).

[2] M. FURI e A. VIGNOLI, *A fixed point theorem in complete metric spaces*, « Boll. Unione Mat. Ital. », 505–509 (1969).

[3] M. FURI e A. VIGNOLI, *Fixed points for densifying mappings*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XLVII, n. 6 (1969).