Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Solutions presque périodiques d'une équation et d'une inéquation parabolique avec terme de retard nonlinéaire. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.6, p. 576–580.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_6_576_0>

Analisi matematica. — *Solutions presque périodiques d'une équation et d'une inéquation parabolique avec terme de retard non linéaire.* Nota I di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si enunciano dei risultati riguardanti la esistenza di una soluzione quasi periodica di una equazione e di una disequazione d'evoluzione parabolica con un termine di ritardo non lineare.

§ 1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉS.

Dans la suite nous indiquons par V un espace de Banach réel reflexif de norme $\| \|$, qu'on peut, sans perdre de generalité, supposer strictement convexe, par V^* son dual, par $\| \|^*$ la norme duale sur V^* et par $\langle , \rangle$ la dualité entre V et V^*.

Nous indiquons par H un espace de Hilbert identifié avec son dual pour le produit scalaire $(,)$ et par $| \ |$ la norme induite sur H par le produit scalaire $(,)$.

Nous supposons V identifié avec un sous-espace dense de H et de plus que la injection de V dans H soit compacte.

Soit $A : V \rightarrow V^*$ avec les propriétés suivantes:

a) A est monotone, borné, hémicontinu

b) $\langle Av , v \rangle \geq \alpha \|v\|^2 \quad \alpha > 0 \quad \forall v \in V$

c) $\langle Aw - Av , w - v \rangle \geq \|w - v\|^2 \quad \alpha > 0 \quad \forall v , w \in V$

d) $\|Av\|^* \leq c \|v\| + k \quad c > 0 \quad \forall v \in V.$

Soit $\psi(\eta) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue.

Considérons $f(t) \in L^2_{\text{Loc}}(\mathbf{R} ; V^*)$ et le problème

$$(1.1) \qquad \begin{cases} u'(t) + Au(t) + \psi(|u(t - \tau)|)\, u(t) = f(t) \\ u(t) \in L^2_{\text{Loc}}(\mathbf{R} ; V) \end{cases}$$

(où $\tau > 0$), d'un type déjà entroduit par Monari [5].

Nous obtenons un résultat assurant l'existence d'une solution presque périodique du problème (1.1):

THÉORÈME I. – *Considérons le problème* (1.1).

(*) Istituto matematico del Politecnico di Milano – Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1970.

Soit $f(t)$ *une fonction presque périodique dans* V^* *et telle que*

$$\| f(t) \|^* \leq R .$$

Supposons que

$$| \psi(\eta_1) - \psi(\eta_2) | \leq M | \eta_1 - \eta_2 | \qquad M < \frac{\gamma^3 \alpha^2}{R}$$

pour $\eta_1 , \eta_2 \leq \dfrac{R}{\gamma\alpha}$ (où γ est la constante d'injection de V dans H).

Alors (1.1) *a, au moins, une solution presque périodique dans* H *et* S^2-*presque périodique dans* V.

De plus, $\forall \varepsilon > 0$, *on a un ensemble relativement dense* $\{\sigma\}_\varepsilon$, *qui depende uniquement de* α , $\psi(\eta)$ *et* $f(t)$, *tel que*

$$\left.\begin{aligned} & | u(t+\sigma) - u(t) | \leq \varepsilon \\ & \int_0^1 \| u(t+\sigma+\eta) - u(t+\eta) \|^2 \, d\eta \leq \varepsilon \end{aligned}\right. \qquad \forall \sigma \in \{\sigma\}_\varepsilon .$$

La démonstration du Théorème I utilise des résultats, concernantes la solution bornée d'une équation parabolique non linéaire et le théorème de point fixe de Hukuhara [3].

La méthode, qui utilise un théorème de pointe fixe, semble nouvelle.

En suite nous considérons le problème de la solution presque périodique pour l'inéquation parabolique deduite du problème (1.1):

THÉORÈME II. – *Supposons que les hypothèses du Théorème I soient valables.*

Soit $\mathbf{K} \subset V$ *fermé convexe dans* V *et* $0 \in \mathbf{K}$.

Considérons l'inéquation parabolique

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t) , v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t) , v(t) - u(t) \rangle +$$

$$+ \psi(| u(t-\tau) |) \langle u(t) , v(t) - u(t) \rangle - \langle f(t) , v(t) - u(t) \rangle \} \, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ | v(t_2) - u(t_2) |^2 - | v(t_1) - u(t_1) |^2 \} , \qquad t_1 \leq t_2 ;$$

$$\forall v(t) \in L^2_{Loc}(\mathbf{R} ; V) \quad \text{avec} \quad v'(t) \in L^2_{Loc}(\mathbf{R} ; V^*) \quad \text{et} \quad v(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p. sur } \mathbf{R};$$

$$u(t) \in L^2_{Loc}(\mathbf{R} ; V) \cap C(\mathbf{R} ; H) \quad , \quad u(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p. sur } \mathbf{R} .$$

Cette inéquation a, au moins, une solution presque périodique dans H *et* S^2-*presque périodique dans* V.

Pour la démonstration du Théorème II nous utilisons la méthode de penalisation et suivons le procédé employé par l'Auteur dans [1].

§ 2. Démonstration d'un lemme preliminaire.

Démontrons le lemme suivant:

Lemme I. – *Soit* $f(t): \mathbf{R} \to V^*$, *avec*

$$\|f(t)\|^* \leq R .$$

Considérons une fonction $\rho(t): \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, *avec* $\rho(t) \in L^\infty(\mathbf{R})$ *et le problème*

$$(2.1) \qquad \begin{cases} u'(t) + Au(t) + \rho(t)\, u(t) = f(t) \\ u(t) \in L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\, V) \end{cases}$$

Le problème (2.1) *a une unique solution.* S^2*–bornée dans* V *et bornée dans* H, *telle que*

$$|u(t)| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} \qquad \int_0^1 \|u(t+\eta)\|^2 \, d\eta \leq c_1$$

où la costante c_1 *depende uniquement de* R *et* α.

On a

$$\int_0^1 (\|f(t+\eta)\|^*)^2 \, d\eta \leq R^2 .$$

Pour un théorème connu, [4], nous pouvons alors affirmer, que le problème (2.1) a une unique solution $u(t)$ bornée dans H et S^2–bornée dans V.

Pour cette solution on a

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + \langle Au(t), u(t)\rangle + \rho(t)\langle u(t), u(t)\rangle = \langle f(t), u(t)\rangle$$

dont

$$(2.2) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \leq \|f(t)\|^* \|u(t)\| - \alpha\|u(t)\|^2 \leq$$

$$\leq \|u(t)\|(R - \alpha\|u(t)\|) \leq \|u(t)\|(R - \alpha\gamma|u(t)|) .$$

Nous observons que $u(t) \in L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\,V)$ $u'(t) \in L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\,V^*)$, dont $u(t) \in C(\mathbf{R}\,;\,H)$.

Démonstrons maintenant que

$$|u(t)| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} .$$

Démontrons d'abord, que, si existe $\bar{t}$, tel que

$$|u(\bar{t})| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta , \qquad \delta > 0$$

alors pour tous $t \geq \bar{t}$, on a

$$(2.3) \qquad |u(t)| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta$$

Nous employons un procédé par l'absurde; si on eût $\bar{\bar{t}} \geq \bar{t}$, tel que

$$|u(\bar{\bar{t}})| > \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta ,$$

il y aurait, alors, un interval $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$, tel que

$$|u(\tilde{t}_1)| = \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta$$

$$|u(t)| > \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta \qquad \text{dans }]\tilde{t}_1, \tilde{t}_2].$$

De (2.2) on a alors

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \leq 0 \qquad \text{dans } [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2];$$

alors $|u(t)|^2$ est décroissante ; donc $|u(t)|$ est décroissante, dont on a

$$|u(t)| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta .$$

On tombe donc dans l'absurde et la thèse est démontrée.

Démontrons, maintenant, que $\forall a \in \mathbf{R}$ il y a un $\bar{t} \in \mathbf{R}$, avec $\bar{t} \leq a$, tel que

$$|u(\bar{t})| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta . \tag{2.4}$$

Nous employons encore un procédé par l'absurde.

Si on a

$$|u(t)| \geq \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta \qquad \forall t \leq a$$

on a

$$\|u(t)\| \geq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{R}{\alpha\gamma} + \delta\right)$$

et

$$\frac{1}{2}|u(a)| + \frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{R}{\alpha\gamma} + \delta\right)(a - t) \leq \frac{1}{2}|u(t)|^2$$

dont

$$\lim_{t \to -\infty} |u(t)| = +\infty .$$

On tombe, donc, dans l'absurde et la thèse est démontré.

De (2.3) et (2.4) on a

$$|u(t)| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} + \delta \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \ \delta > 0$$

et donc

$$|u(t)| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} \qquad \forall t \in \mathbf{R} .$$

De (2.2) on a

$$\alpha\int_0^1 \|u(t+\eta)\|^2 d\eta \leq \left(\int_0^1 (\|f(t+\eta)\|^*)^2 d\eta\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \|u(t+\eta)\|^2 d\eta\right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\{|u(t+1)|^2 - |u(t)|^2\} \leq R\left(\int_0^1 \|u(t+\eta)\|^2 d\eta\right)^{1/2} + \frac{2R}{\alpha\gamma}$$

dont

$$\int_0^1 \| u(t+\eta) \|^2 \, \mathrm{d}\eta \leq c_1$$

où c_1 est une constante, qui depende uniquement de α et R.

Remarque 1. – Nous observons que, dans les conditions du lemme, on a

$$\left(\int_0^1 (\| u'(t+\eta) \|^*)^2 \, \mathrm{d}\eta \right)^{1/2} \leq c \cdot \left(\int_0^1 \| u(t+\eta) \|^2 \, \mathrm{d}\eta \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_0^1 (\rho(t+\eta) \cdot \| u(t+\eta) \|^2) \, \mathrm{d}\eta \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 (\| f(t+\eta) \|^*)^2 \, \mathrm{d}\eta \right)^{1/2}.$$

Alors on a

$$\int_0^1 (\| u'(t+\eta) \|^*)^2 \, \mathrm{d}\eta \leq c_2$$

où c_2 est une constante, qui depende de α, R et de $Q = \operatorname*{Sup}_{t \in \mathbf{R}} \rho(t)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. BIROLI, *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution* – à paraitre. « Annali Mat. ».

[2] M. BIROLI, *Su di una equazione parabolica con termine di ritardo non lineare* – à paraitre « Boll. U. M. I. ».

[3] H. BRÉZIS, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces en dualité*, « Ann. Inst. Fourier », *18*, 115–175 (1968).

[4] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires* – Dunod, Gauthier-Villars-Coll. études mathematiques 1969.

[5] C. MONARI, *Soluzioni periodiche di una equazione parabolica con termine di ritardo non lineare*. « Rend. Ist. Lomb. di scienze e lettere », *103* (1969).