Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Dentoni

Applicazioni monogene tra spazi di Banach

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.6, p. 572–575.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_6_572_0>

Matematica. — *Applicazioni monogene tra spazi di Banach* [*]. Nota di PAOLO DENTONI, presentata [**] dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — A preliminary report on an extension of the theory of monogenic functions to the case of mappings between B-spaces.

1. È noto che nelle algebre è stata sviluppata con successo, per le funzioni monogene, un'ampia teoria, che contiene come casi particolari una buona parte dei risultati classici [1]. Ci si può chiedere in quale misura essa dipenda effettivamente dalla struttura d'algebra dello spazio ambiente. In questa Nota sono riassunti alcuni risultati, ottenuti in una recente ricerca in questa direzione [2].

Considerate le funzioni definite in uno spazio di Banach ed a valori in uno spazio di Banach, si introduce la nozione di funzione monogena, mediante la considerazione di una *coppia di operatori lineari* tra 0-forme ed 1-forme (D_2, n. 4). Questi operatori svolgono il ruolo che hanno nel caso classico gli operatori *differenziale* e *moltiplicazione per un elemento dell'algebra* (n. 3).

La *simmetria* della definizione di monogeneità nei due operatori (teor. T_1, n. 4) conduce a stabilire l'*indefinita derivabilità* delle funzioni monogene (P_3, n. 5) e l'*esistenza di una primitiva* (teor. T_2, n. 6). Quando il primo operatore si riduce al differenziale, sussiste anche un *teorema integrale* di tipo Cauchy (teor. T_3, n. 6).

Un'osservazione al n. 7 mostra infine l'esistenza di una sorta di *dualità*, che ha luogo scambiando fra loro gli operatori della coppia.

2. Siano V, W spazi di Banach reali, U un aperto di V, $\mathfrak{L}_p(V, W)$ lo spazio delle applicazioni p-lineari continue di V^p in W e $\mathfrak{A}_p(V, W)$ il sottospazio di $\mathfrak{L}_p(V, W)$ costituito dalle applicazioni p-lineari *alternanti*.

Dato un omomorfismo $q: W^U \to \mathfrak{L}(V, W)^U$, che associa ad ogni funzione $f: U \to W$ una 1-forma $\omega_1: U \to \mathfrak{L}(V, W)$, per naturale estensione può definirsi una catena di omomorfismi, denotati ancora con q, di $\mathfrak{L}_p(V, W)^U$ in $\mathfrak{L}_{p+1}(V, W)^U$ $(p = 1, 2, 3, \cdots)$. Ciascuno di questi omomorfismi dà poi

(*) Ricerca eseguita nel Programma n. 9 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1970.

(1) Ved. p. es. E. R. LORCH, *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, « Trans. Amer. Math. Soc. » (1943); G. B. RIZZA, *Teoria delle funzioni nelle algebre complesse dotate di modulo e commutative*, « Rend. Mat. e Appl. » (1953).

(2) Essi appariranno per esteso nel lavoro *Sulla monogeneità negli spazi di Banach* (« Annali di Mat. »), al quale si rinvia per le dimostrazioni e la bibliografia completa.

luogo, fra i sottospazi $\mathfrak{A}_p(V, W)^U$ e $\mathfrak{A}_{p+1}(V, W)^U$, ad un corrispondente *omomorfismo esterno* $\boldsymbol{q}$, definito per ogni p-forma $\omega_p \in \mathfrak{A}_p(V, W)^U$ dalla relazione

$$(1) \qquad \boldsymbol{q}\omega_p(x)\cdot(v_1, \cdots, v_{p+1}) = = \frac{(-1)^p}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} q\omega_p(x)\cdot(v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_{p+1}, v_i).$$

Supponendo l'operatore $q : W^U \to \mathfrak{L}(V, W)^U$ *simmetrico*, cioè tale che per ogni $f \in W^U$, $x \in U$ la funzione $q^2 f(x)\cdot(v_1, v_2)$ riesca simmetrica in v_1, v_2, ne deriva per $\boldsymbol{q}$ la proprietà fondamentale:

P0 – *Per ogni p-forma $\omega_p \in \mathfrak{A}_p(V, W)^U$ $(p \geq 0)$, risulta*:

$$\boldsymbol{q}^2 \omega_p = 0 .$$

È utile infine la definizione:

D1 – *Un operatore esterno $\boldsymbol{q}$ si dice un operatore di Poincaré se per ogni p-forma $\omega_p \in \mathfrak{A}_p(V, W)^U$ $(p \geq 1)$ tale che $\boldsymbol{q}\omega_p = 0$, esiste una $(p-1)$-forma $\omega_{p-1} \in \mathfrak{A}_{p-1}(V, W)^U$ tale che $\boldsymbol{q}\omega_{p-1} = \omega_p$.*

3. Come operatore $q : W^U \to \mathfrak{L}(V, W)^U$ può assumersi in particolare il *differenziale* (di Fréchet) d (3). Il corrispondente operatore esterno $\boldsymbol{d}$ è un operatore di Poincaré, in ogni aperto convesso U (Lemma di Poincaré).

Se gli spazi V, W coincidono in un'algebra di Banach A, commutativa e dotata di unità u, può assumersi come omomorfismo q anche l'operatore $\boldsymbol{m}$ di *moltiplicazione per un elemento dell'algebra*, definito per ogni $f \in A^U$, $x \in U$, $a \in A$ dalla relazione

$$(2) \qquad (mf)(x)\cdot a = f(x)\, a .$$

La commutatività di A assicura la validità di P0 (n. 2). Sussiste poi la proprietà:

P1 – *L'operatore esterno $\boldsymbol{m}$ corrispondente all'operatore di moltiplicazione m è un operatore di Poincaré.*

P1 segue immediatamente dalla (1), tenendo presente che per la (2) può scriversi

$$m\omega_p(x)\cdot(v_1, \cdots, v_p, u) = \omega_p(x)\cdot(v_1, \cdots, v_p)$$

per ogni $\omega_p \in \mathfrak{A}_p(V, W)^U$, $x \in U$, $(v_1, \cdots, v_p) \in V^p$.

4. Siano $q, \tilde{q} : W^U \to \mathfrak{L}(V, W)^U$ omomorfismi, tali che i corrispondenti operatori esterni $\boldsymbol{q}, \tilde{\boldsymbol{q}}$ risultino operatori di *Poincaré*, e sussista inoltre la *relazione di permutabilità*

$$(3) \qquad \operatorname{Ker} \tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q} = \operatorname{Ker} \boldsymbol{q}\tilde{\boldsymbol{q}} .$$

(3) Naturalmente, l'operatore d va ristretto alle funzioni di classe C^1.

Ciò premesso, si assume la seguente definizione:

D2 – *La funzione* $f : U \to W$ *si dice* $(q, \tilde{q})$*-monogena in* U, *se esiste una funzione* $f' : U \to W$ *(derivata prima di* f*) tale che risulti*

$$qf = \tilde{q}f' \text{ (4)}.$$

La definizione D2 riesce simmetrica nei due operatori $q, \tilde{q}$, cioè:

T1 – *Ogni funzione* $(q, \tilde{q})$*-monogena è anche* $(\tilde{q}, q)$*-monogena, e viceversa.*

Per la dimostrazione basta osservare che se f è una funzione $(q, \tilde{q})$-monogena, per la proprietà P_0 può scriversi $\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}f = \tilde{\boldsymbol{q}}^2 f' = 0$ onde per la (3) risulta $\boldsymbol{q}\tilde{\boldsymbol{q}}f = 0$. L'ipotesi che $\boldsymbol{q}$ sia operatore di Poincaré conduce allora all'asserto. Analogamente per la parte inversa di T1.

5. Conviene segnalare il seguente corollario del teorema T1:

P2 – *Se* f *è una funzione* $(q, \tilde{q})$*-monogena in* U, *anche ogni sua* $(q, \tilde{q})$*-derivata prima* f' *è ivi* $(q, \tilde{q})$*-monogena.*

Per la dimostrazione, si riguardi f come una $(\tilde{q}, q)$-derivata di f'.

Segue da P2 l'osservazione:

P3 – *Ogni funzione* $(q, \tilde{q})$*-monogena* $f : U \to W$ *possiede in* U $(q, \tilde{q})$*-derivate* $f^{(r)}$ *di ogni ordine.*

6. È utile la definizione:

D3 – *Si dice che la funzione* $f : U \to W$ ammette come $(q, \tilde{q})$*-primitiva una funzione* $F_{(1)} : U \to W$ *se* $F_{(1)}$ *è* $(q, \tilde{q})$*-monogena ed ammette* f *come* $(q, \tilde{q})$*-derivata.*

La definizione D3 consente di precisare ulteriormente l'accennato collegamento tra la $(q, \tilde{q})$- e la $(\tilde{q}, q)$-monogeneità. Invero, potendosi ogni $(q, \tilde{q})$-derivata (primitiva) riguardare anche come una $(\tilde{q}, q)$-primitiva (derivata), diviene possibile ricondurre alla $(q, \tilde{q})$-teoria molti risultati nei quali intervengano nozioni legate alla coppia $(\tilde{q}, q)$. Ad esempio, il teorema T1 diviene:

T2 – *Condizione necessaria e sufficiente perché la funzione* $f : U \to W$ *ammetta una* $(q, \tilde{q})$*-primitiva* $F_{(1)} : U \to W$, *è che* f *sia* $(q, \tilde{q})$*-monogena nell'aperto* U.

Se inoltre si assume l'operatore q coincidente con il differenziale d, il teorema T2 può ulteriormente perfezionarsi in un teorema integrale di tipo Cauchy. Precisamente:

T3 – *Se* f *è una funzione* $(d, \tilde{q})$*-monogena nell'aperto* U, *risulta*

$$\int_{\gamma} \tilde{q}f = 0 \tag{4}$$

(4) La $(q, \tilde{q})$-monogeneità si riduce all'usuale monogeneità nelle algebre se si assume $q = d$, $\tilde{q} = m$ (n. 3). La condizione di permutabilità (3) è soddisfatta, sussistendo per gli operatori $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{m}$ la relazione $\boldsymbol{dm} + \boldsymbol{md} = 0$.

per ogni curva chiusa γ *di classe* C^1, *omotopa ad un punto in* U. *Inversamente, se* f *è di classe* C^1 *in* U, *e vale la* (4) *per ogni* γ *omotopa ad un punto in* U, *allora* f *è ivi* $(d, \tilde{\tilde{q}})$*-monogena.*

7. Conviene infine osservare esplicitamente che ad ogni proprietà P, che faccia intervenire le nozioni di $(q, \tilde{\tilde{q}})$-derivata e $(q, \tilde{\tilde{q}})$-primitiva, può associarsi, sempre nella $(q, \tilde{\tilde{q}})$-teoria, una proprietà P^* (*proprietà duale*). Invero, a causa della simmetria delle ipotesi sugli operatori $q, \tilde{\tilde{q}}$ (n. 4), a P corrisponde una proprietà $\tilde{\tilde{P}}$ nella $(\tilde{\tilde{q}}, q)$-teoria e da questa si perviene alla P^* seguendo il procedimento utilizzato al n. 6.

Conviene segnalare, in particolare, la seguente osservazione, duale della proprietà P3:

P4 – *Se una funzione* $f: U \rightarrow W$ *ammette una* $(q, \tilde{\tilde{q}})$*-primitiva, essa ammette in* U $(q, \tilde{\tilde{q}})$*-primitive* $F_{(r)}$ *di ogni ordine* $r \geq 1$.

Sussistono infine altri risultati, relativi alle funzioni definite in un'algebra. Gli operatori $q, \tilde{\tilde{q}}$ sono in questo caso il differenziale ed una opportuna generalizzazione della moltiplicazione.