Federico Menegazzo

Gruppi nei quali ogni sottogruppo è intersezione di sottogruppi massimali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.6, p. 559–562.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_6_559_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 giugno 1970

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Gruppi nei quali ogni sottogruppo è intersezione di sottogruppi massimali.* Nota di FEDERICO MENEGAZZO, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — In this paper we determine the structure of the soluble groups in which every proper subgroup is an intersection of maximal subgroups. Our main result is: A group G is soluble and every subgroup H of G is the intersection of the maximal subgroups of G containing H if and only if G has a normal Hall subgroup N such that (i) N is elementary abelian, (ii) G/N is elementary abelian, and (iii) every element of G induces on N a ' power automorphism '.

Un gruppo G si dice IM–gruppo se ogni suo sottogruppo è l'intersezione dei sottogruppi massimali di G che lo contengono. Se H , K sono sottogruppi del gruppo G tali che $H \subseteq K$, $\Phi[K/H]$ è per definizione l'intersezione di K e dei sottogruppi massimali di K contenenti H; in particolare $\Phi[G/1] = \Phi(G)$, il sottogruppo di Frattini di G. Con questa terminologia G è un IM–gruppo se $\Phi[G/H] = H$ per ogni sottogruppo H di G. Il gruppo G si dice $\overline{\text{IM}}$–gruppo se ogni sottogruppo di G è un IM–gruppo, o equivalentemente se $\Phi[K/H] = H$ per ogni coppia H , K di sottogruppi di G tali che $H \subseteq K$.

In questo lavoro (1) si studiano gli IM–gruppi, dandone nel caso risolubile una caratterizzazione nel teorema 2.1 : G è un IM–gruppo risolubile se e solo se possiede un sottogruppo N normale, di Hall e abeliano elementare tale che G/N è abeliano elementare e ogni elemento di G induce su N un automorfismo potenza.

Le notazioni e le definizioni sono quelle usuali nella teoria dei gruppi. Il gruppo G si dice risolubile (supersolubile) se ogni immagine omomorfa non identica di G possiede un sottogruppo normale abeliano (ciclico) non

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1970.

(1) Eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

identico. Il gruppo G si dice T–gruppo se da $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$ segue $A \trianglelefteq G$. Il gruppo G si dice $\overline{T}$–gruppo se ogni sottogruppo di G è un T–gruppo. Per ogni gruppo G sarà indicato con $\mathfrak{L}(G)$ il reticolo dei sottogruppi di G; se $H \subseteq K \subseteq G$, $[K/H]$ indica il sottoreticolo di $\mathfrak{L}(G)$ costituito dai sottogruppi X di G tali che $H \subseteq X \subseteq K$.

1. In questo numero si dimostrano alcune proposizioni preliminari al teorema 2.1.

1.1. *Se* G *è un* IM*–gruppo, allora* G *è un* T*–gruppo.*

Sia $A \triangleleft B \triangleleft G$, e sia $\{M_i\}_{i \in I}$ l'insieme dei sottogruppi massimali di G contenenti A; è $A = \bigcap_{i \in I} M_i$ e anzi, se $J \subseteq I$ è l'insieme degli indici tali che $j \in J$ se e solo se M_j non contiene B, risulta $A = B \cap (\bigcap_{j \in J} M_j) = \bigcap_{j \in J} (B \cap M_j)$. Per ogni $j \in J$ si ha $B \cap M_j \triangleleft M_j$ e $G = M_j B$, da cui, qualunque sia $x \in G$, posto $x = m_j b_j$ con $m_j \in M_j$, $b_j \in B$, segue $(B \cap M_j)^x = (B \cap M_j)^{b_j} \supseteq A^{b_j} = A$ e quindi $A^x = \bigcap_{j \in J} (B \cap M_j)^x \supseteq A$. Data l'arbitrarietà di $x \in G$, è dunque $A \triangleleft G$.

1.2. *Se* G *è un* $\overline{\text{IM}}$*–gruppo localmente finito, allora* G *è risolubile.*

Ogni sottogruppo finitamente generato di G è un $\overline{T}$–gruppo finito, ed è quindi risolubile, ed anzi [3] metabeliano; dunque $G'' = 1$.

1.3. *Se* G *è un* IM*–gruppo,* H *un sottogruppo di* G, K *un gruppo tale che* $\mathfrak{L}(K) \cong [G/H]$, *allora* K *è un* IM*–gruppo.*

Ovvio.

1.4. *Se* G *è un p–gruppo risolubile e* $\Phi(G) = 1$, *allora* G *è abeliano elementare.*

G è localmente nilpotente, quindi vale in G la condizione $\tilde{N}$ ([1], pag. 230, vol. II); ne segue che ogni sottogruppo massimale di G è normale, ed il relativo gruppo quoziente ha ordine p: ma allora $G/\Phi(G) \cong G$ è abeliano elementare.

1.5. *Se* G *è un* IM*–gruppo risolubile, allora* G *è periodico.*

Supponiamo che G non sia periodico. Poiché per 1.1 G è un T–gruppo, si presenta uno dei seguenti casi [3]:

i) G ha un quoziente $\overline{G}$ aperiodico non identico. $\overline{G}$ è abeliano [3] ed è divisibile: infatti se per un primo p fosse $\overline{G}^p \neq \overline{G}$ sarebbe $\overline{G}^{p^2} \neq \overline{G}^p$ e il p–gruppo $\overline{G}/\overline{G}^{p^2}$ non sarebbe elementare, in contraddizione con 1.3 e 1.4; ma i gruppi abeliani divisibili non hanno sottogruppi massimali.

ii) G ha un quoziente $\overline{G} = \langle z, A \rangle$ dove A è un gruppo abeliano aperiodico, $z^2 = 1$, $A^2 = A \neq 1$, $z^{-1} a z = a^{-1}$ per ogni $a \in A$. Facilmente si costruisce un isomorfismo reticolare tra gli intervalli $[\overline{G}/\langle z \rangle]$ e $[A/1]$, e per 1.3 A è un IM–gruppo; ma ciò è escluso da i).

2. Con l'ausilio dei lemmi precedenti, è possibile ottenere una effettiva descrizione degli IM–gruppi nel caso risolubile, e degli $\overline{\text{IM}}$–gruppi localmente finiti. Se φ è un automorfismo del gruppo G, φ si dice automorfismo potenza se $H\varphi = H$ per ogni sottogruppo H di G.

2.1. *Il gruppo* G *è un* IM–*gruppo risolubile se e solo se* G *contiene un sottogruppo normale* N *tale che*

a) N *è abeliano elementare e di Hall*;

b) G/N *è abeliano elementare*;

c) *gli automorfismi indotti su* N *mediante coniugazione dagli elementi di* G *sono automorfismi potenza.*

Se G è un IM–gruppo risolubile, allora G è, per 1.1 e 1.5, un T–gruppo periodico; in particolare G è supersolubile e i suoi elementi di periodo dispari formano un sottogruppo (normale) G (2). G/G (2) è un 2–gruppo abeliano elementare per 1.4 e quindi [3] G contiene un sottogruppo normale N abeliano e di Hall tale che G/N è abeliano e che inoltre ogni elemento di G induce mediante coniugazione su N un automorfismo potenza. G/N è prodotto diretto di p–gruppi che per 1.4 sono abeliani elementari; rimane da provare ora la a). Poiché ogni sottogruppo di N è normale in G, qualunque sia il sottogruppo H di G, le applicazioni $\varphi : [NH/H] \to [N/N \cap H]$ data da $X\varphi = X \cap N$ per ogni $X \supseteq H$ e $\psi : [N/N \cap H] \to [NH/H]$ data da $Y\psi = Y \cup H$ per ogni Y tale che $N \cap H \subseteq Y \subseteq N$ sono inverse l'una dell'altra e realizzano un isomorfismo reticolare tra gli intervalli considerati. In particolare ogni sottogruppo massimale di G che non contenga N interseca N in un sottogruppo massimale di N; quindi $1 = \Phi(G) = \bigcap_{i \in I} (N \cap M_i) \supseteq \Phi(N)$ dove M_i varia nell'insieme di tutti i sottogruppi massimali di G ed N è abeliano elementare, il che dimostra la necessità della condizione. Viceversa, il gruppo G abbia un sottogruppo normale N soddisfacente le condizioni a), b), c); G è evidentemente risolubile. Dimostriamo che il sottogruppo identico di G è intersezione di sottogruppi massimali. Infatti, sia $z \neq 1$, $z \in G$ (per il nostro scopo non è restrittivo supporre $|z| = p$, p un primo); se $z \in N$ sia P il p–sottogruppo di Sylow di G. P ha complemento L in G e, se $P = \langle z \rangle \times Q$, QL è un sottogruppo massimale di G non contenente z. Se poi $z \notin N$, poiché G/N è abeliano elementare, per un opportuno sottogruppo L di G risulta $G/N = \langle zN \rangle \times L/N$, ed L è un sottogruppo massimale di G non contenente z; l'asserto è così provato. Sia ora H un arbitrario sottogruppo di G; poiché $H \cap N \trianglelefteq G$ e il sottogruppo normale $N/H \cap N$ di $G/H \cap N$ soddisfa a), b), c), è sufficiente trattare il caso in cui $H \cap N = 1$. Consideriamo un arbitrario elemento $z \in G \setminus H$ (non è restrittivo supporre $|z| = p$, p un primo); se $z \in N$ e P è il p–sottogruppo di Sylow di G, poiché $|G : \mathcal{C}_G(P)|$ è finito, esiste un complemento L di P in G contenente H; posto $P = \langle z \rangle \times Q$ il sottogruppo QL è un sottogruppo massimale di G che contiene H ma non z. Se invece $z \notin N$ ma $zN \in HN$ risulta $z = hn$ con $h \in H$, $1 \neq n \in N$ convenienti; per quanto visto nel caso precedente esiste un sottogruppo massimale M di G che contiene H ma non n, e quindi nemmeno z. Se infine $zN \notin HN$, poiché G/N è abeliano elementare, risulta $G/N = \langle zN \rangle \times L/N$ per un conveniente sottogruppo L di G contenente HN, ed L è un sottogruppo massimale di G contenente H ma non z. Dunque l'intersezione dei sottogruppi massimali di G contenenti H è H stesso.

2.2. *Il gruppo* G *è un* $\overline{\mathrm{IM}}$–*gruppo localmente finito se e solo se* G *è un* IM–*gruppo risolubile.*

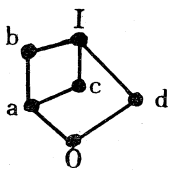
Se G è un $\overline{\mathrm{IM}}$–gruppo localmente finito, G è risolubile per 1.2; quanto al viceversa, è sufficiente osservare che ogni sottogruppo di un gruppo G soddisfacente le condizioni del teorema 2.1 soddisfa esso stesso le condizioni in questione.

Il gruppo G si dice RK–gruppo se il reticolo dei suoi sottogruppi è relativamente complementato. Gli RK–gruppi localmente finiti sono caratterizzati in [2].

2.3. *Ogni* RK–*gruppo localmente finito è un* $\overline{\mathrm{IM}}$–*gruppo; ogni* $\overline{\mathrm{IM}}$–*gruppo finito è un* RK–*gruppo; esiste un* $\overline{\mathrm{IM}}$–*gruppo localmente finito che non è un* RK–*gruppo.*

La prima affermazione è ovvia; per la seconda si osservi che le caratterizzazioni 2.2 di questa Nota e 1.2 in [2] nel caso finito coincidono; per la terza si veda l'esempio in [2].

3. Sarebbe interessante conoscere se, almeno nel caso finito, ogni IM–gruppo sia risolubile (e quindi supersolubile), o almeno non semplice. Da un lato un controllo diretto prova che i gruppi semplici « minimi » non sono IM–gruppi, dall'altro il reticolo



mostra che non sono sufficienti considerazioni puramente reticolari per eventualmente concludere in senso affermativo. Non è inoltre noto se la proprietà IM sia ereditata dai sottogruppi, o almeno dai sottogruppi normali. Poiché per 2.2 i sottogruppi degli IM–gruppi risolubili sono ancora tali, questo problema è strettamente legato al precedente; un risultato parziale in questa direzione è il seguente:

3.1. *Sia* G *un* IM–*gruppo. Se il sottogruppo normale* H *di* G *è risolubile, allora* H *è un* IM–*gruppo.*

Infatti H è un T–gruppo risolubile, e con leggere modifiche le dimostrazioni di 1.4 e 1.5 provano che H è periodico e che i suoi p–sottogruppi di Sylow sono abeliani elementari; la conclusione è allora conseguenza di 2.1.

BIBLIOGRAFIA.

[1] KUROSH A. G., *The theory of groups*, Chelsea 1956.

[2] MENEGAZZO F., *Sui gruppi relativamente complementati*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *43* (1969).

[3] ROBINSON D. J. S., *Groups in which normality is a transitive relation*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », *60*, part 1 (1964).