Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Giannantonio Pezzoli

## L’effetto delle resistenze sulla propagazione delle maree

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **48** (1970), n.5, p. 508–513.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_5_508_0>

**Idrodinamica.** — *L'effetto delle resistenze sulla propagazione delle maree.* Nota di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY, — In this technical report we have studied tidal wave propagation, by level oscillations of sinusoidal law in channels with rectangular gradually varied section and with friction.

It has been demonstrated how it is possible to reach real results for the attenuation of waves, using the methods of non-linear mechanics.

It has been particularly observed that in the case of a horizontal bottom and constant section, a wave damps like the amplitude of a harmonic oscillator with square-law resistance.

Il problema della propagazione delle maree, schematizzato come problema di propagazione di onde di notevole lunghezza perché il rapporto $a/\lambda$ risulti molto piccolo, è stato sinora affrontato in un grandissimo numero di memorie celebri e di trattati che è qui impossibile citare.

Tuttavia questo problema di grandissima importanza, possiede un aspetto sul quale gli studi eseguiti sono in numero relativamente scarso e di cui ancora non esistono soluzioni del tutto soddisfacenti.

Si vuole qui parlare dell'influenza delle resistenze passive, offerte al moto dal fondo e dalle sponde del canale o braccio di mare in cui si può propagare un'onda di marea.

La questione è stata presa in esame dallo scrivente e studiata con procedimenti approssimati in [1]; in questa Nota si è mostrato come sia possibile integrare l'equazione differenziale alle derivate parziali che regge il fenomeno ricorrendo ad un semplice artificio, ricavandone tuttavia una espressione di poco agevole impiego.

In seguito, [2], utilizzando un metodo proposto da J. Lamoen [3] ho potuto linearizzare la stessa equazione giungendo anche a risultati espliciti per il coefficiente di attenuazione delle onde.

È possibile tuttavia eseguire uno studio più accurato del problema, seguendo l'onda nel suo percorso, e dare una soluzione asintotica delle equazioni, nel caso più generale di sezione variabile con l'ascissa $x$ ricorrendo, come già è stato fatto in [4], ad un particolare metodo che prende le mosse dal classico metodo di Krylof che offre la soluzione asintotica delle equazioni quasi armoniche non lineari e con un'opportuna trasformazione, anche di quelle lineari a coefficienti variabili.

Cominciamo con lo stabilire le equazioni di partenza; l'equazione del moto, tenendo conto delle resistenze di tipo idraulico, proporzionali al qua-

(*) Nella seduta del 9 maggio 1970.

drato delle velocità in modulo, e sempre contrarie al senso del moto stesso si scrive:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{g}{\chi^2 y} \frac{\partial \xi}{\partial t} \left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right| + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

mentre l'equazione di continuità risulta:

$$\eta = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (by\xi) . \tag{2}$$

Si è considerata naturalmente una propagazione su acqua inizialmente ferma ed è stato fatto riferimento, per semplicità, ad un alveo a sezione lentamente e gradualmente variabile, sempre rettangolare, di profondità e larghezza rispettivamente $y$ e $b$; l'ascissa è contata positivamente nel senso del moto.

Nella (1), si può eliminare $\eta$ mediante la (2), con il che si ottiene

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gy \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2g \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{g}{\chi^2 y} \frac{\partial \xi}{\partial t} \left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right| = 0. \tag{3}$$

In questa deduzione si sono naturalmente trascurati i termini contenenti le derivate seconde di $b$ ed $y$ rispetto ad $x$ e i prodotti delle derivate prime, posta l'ipotesi della lenta variazione di dette grandezze con $x$.

Per l'integrazione della (3) procediamo nel seguente modo: se fossero nulli i due ultimi termini dell'equazione, che tengono conto della variazione di profondità e delle resistenze, l'equazione stessa si ridurrebbe in approssimazione di ordine 0 alla

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gy(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

per la quale, assegnata all'origine degli assi una espressione di $\xi$ data da

$$\xi = f(x) \sin \omega t \tag{5}$$

si otterrebbe

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{gy(x)} f = 0 . \tag{6}$$

La (6) può essere trattata come è stato mostrato in [5] in modo esatto, se è assegnata per $y$ una legge di variazione monomia con $x$; altrimenti la si può risolvere asintoticamente (vedi [6] e [7]), ricordando che se è

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} + p(x) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + q(x) z = 0 \tag{7}$$

la più generale equazione differenziale ordinaria del II° ordine con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni in generale continue di $x$, lentamente variabili con la $x$ stessa, con $q(x) > 0$, ed a soluzione oscillante, questa può essere calcolata asintoticamente e vale

$$z = \mathrm{A} \sin \varphi \tag{8}$$

dove è

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{A}\frac{dA}{dx} = -p(x) \\ &\frac{d\varphi}{dx} = \pm\sqrt{q(x)}\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Così procedendo la (6) fornisce

$$f = A_0 \sin\left(\omega \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{gy}} + B\right) \tag{10}$$

essendo $A_0$ e B due costanti arbitrarie di integrazione.

Ritornando alla (3), se i due ultimi termini fossero uguali a 0, si potrebbe assegnare, in approssimazione d'ordine 0, una soluzione periodica di regime del tipo:

$$\xi = \xi_0 \sin\frac{\omega}{c}(x - ct + \psi) \tag{11}$$

con la velocità di propagazione $c$ data da

$$c = \frac{x}{\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\pm\sqrt{gy}}} \tag{12}$$

e $\xi_0$ e $\psi$ costanti arbitrarie.

Essendo invece i due termini abbastanza piccoli, ma non nulli, moduliamo $\xi_0$ e $\psi$ in funzione dell'ascissa, ricordando che nell'approssimazione di partenza, $t$ ed $x$ sono legate nella variabile $\left(t - \frac{x}{c}\right)$.

Imponiamo inoltre che posto l'argomento del seno nella (11) uguale a $\vartheta$, sia anche:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \xi_0 \frac{\omega}{c}\cos\vartheta \tag{13}$$

ed inoltre

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\,\omega\,\xi_0 \cos\vartheta\,. \tag{14}$$

Tuttavia dovendo essere anche, se si trascurano i termini provenienti dalla variazione di $c$ con $x$,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{d\xi_0}{dx}\sin\vartheta + \frac{\omega}{c}\xi_0\left(1 + \frac{d\psi}{dx}\right)\cos\vartheta \tag{15}$$

eguagliando il secondo membro della (15) a quello della (13), si ottiene la prima condizione di integrazione

$$\frac{d\xi_0}{dx}\sin\vartheta + \frac{\omega}{c}\xi_0\frac{d\psi}{dx}\cos\vartheta = 0\,. \tag{16}$$

Dalla (13) e (14) si ottengono le derivate seconde, che si scrivono, con le approssimazioni già viste (vedi [5]):

$$
(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{d\xi_0}{dx}\dfrac{\omega}{c}\cos\vartheta - \xi_0 \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1+\dfrac{d\psi}{dx}\right)\sin\vartheta \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\,\omega^2 \xi_0 \sin\vartheta \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial t} = \xi_0 \dfrac{\omega^2}{c}\sin\vartheta\left(1+\dfrac{d\psi}{\partial x}\right) - \omega\dfrac{d\xi_0}{dx}\cos\vartheta . \end{cases}
$$

Effettuiamo ora sulla (3) le sostituzioni opportune, e ritenendo, nel consueto ordine di approssimazioni, $gy/c^2$ molto prossima ad 1, otteniamo ancora:

$$
(18)\qquad \frac{d\xi_0}{dx}\cos\vartheta - \frac{\omega}{c}\xi_0\frac{d\psi}{dx}\sin\vartheta = -\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}\xi_0\cos\vartheta - \frac{\omega c}{\chi^2 y^2}\xi_0^2\cos\vartheta\,|\cos\vartheta|\,,
$$

Facendo sistema fra la (16) e la (18), e risolvendolo rispetto a $d\xi_0/dx$ e $d\psi/dx$, mediando i secondi membri in un periodo, ritenendo in esso costanti le funzioni di $t$ ed $x$ secondo il concetto classico di Van der Pool, Krylof e Bogoliuboff, si giunge alle equazioni risolventi:

$$
(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_0}{dx} = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}\xi_0\cos^2\vartheta + \frac{c\omega}{\chi^2 y^2}\xi_0^2\cos^2\vartheta\,|\cos\vartheta|\right)d\vartheta \\ \dfrac{d\psi}{dx} = \dfrac{c}{2\pi\omega\xi_0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}\xi_0\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{c\omega}{\chi^2 y^2}\xi_0^2\cos\vartheta\sin\vartheta\,|\cos\vartheta|\right)d\vartheta . \end{cases}
$$

Si vede subito che è nullo l'integrale a secondo membro della 2ª della (19), per cui si può porre $\psi = \psi_0 = 0$, mentre la 1ª fornisce

$$
(20)\qquad \frac{d\xi_0}{dx} = -\frac{\xi_0}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{3\pi}\frac{c\omega}{\chi^2 y^2}\xi_0^2
$$

che consente di volta in volta, o con integrazioni numeriche, oppure nei casi in cui sia possibile l'integrazione diretta, di ottenere l'andamento di $\xi_0(x)$.

Se ad esempio nella (20) si suppone nullo il 2° termine a secondo membro, che tiene conto delle resistenze passive, si verifica che è costante il prodotto $\xi_0 y$, il che, attraverso la (2) fornisce l'espressione di $\eta$, che ad esempio, nel caso di $b =$ cost. e di andamento del fondo dato da

$$
(21)\qquad y = ax^n
$$

caso considerato già da G. Supino [5] e dallo scrivente [7], permette di giungere agli stessi risultati ottenuti nella memoria anzidetta.

Qualora invece si voglia considerare l'altro caso limite, di sezione costante e pendenza nulla, tenendo però conto delle resistenze, dalla (20) sparirà il

1° termine a secondo membro, e avremo integrando:

$$\xi_0 = \frac{\bar{\xi}_0}{1 + \frac{4}{3\pi} \frac{\bar{\xi}_0 c \omega}{\chi^2 y^2} x} \tag{22}$$

dove $\bar{\xi}_0$ è il valore iniziale di $\xi_0$, per cui, tenuto conto della (2), la soluzione per $\eta$, trascurando rispetto al principale un termine che è dell'ordine dell'1 $^0/_{00}$ rispetto a quello conservato, vale

$$\eta = -\frac{\omega y}{c} \frac{\bar{\xi}_0}{1 + \mathrm{K} x} \cos \frac{\omega}{c}(x - ct) \tag{23}$$

con K dato da

$$\mathrm{K} = \frac{4}{3\pi} \frac{\bar{\xi}_0 c\omega}{\chi^2 y^2} . \tag{24}$$

Se ora si ha presente, considerando la (11) e (23) che se si indica con $\bar{\eta}_0$ il valore di $\eta$ corrispondente a $\bar{\xi}_0$, si ha

$$\left| \frac{\eta_{\max}}{\xi_{\max}} \right| \simeq \frac{\omega y}{c} \tag{25}$$

e quindi

$$\bar{\xi}_0 \simeq \frac{c \bar{\eta}_0}{\omega y_0} \tag{26}$$

per cui, essendo $\bar{\eta}_0$ l'ampiezza iniziale dell'onda, la (23) diviene

$$\eta = -\frac{\bar{\eta}_0}{1 + \frac{4}{3\pi} \frac{g}{\chi^2} \frac{\bar{\eta}_0}{y^2} x} \cos \frac{\omega}{c}(x - ct) . \tag{27}$$

Questo risultato, che ritengo nuovo ed inedito, mostra che in alvei a fondo orizzontale e di sezione costante, l'ampiezza dell'onda si attenua, anziché secondo un esponenziale del tipo $e^{-\alpha x}$, secondo una funzione di tipo iperbole $1/1 + \mathrm{K}x$, vale a dire secondo la funzione d'attenuazione di un oscillatore con resistenza idraulica (quadratica); le onde su moto base preponderante si attenuano invece molto prossimamente come se si trattasse di un oscillatore con resistenza viscosa.

Il risultato qui ottenuto, concorda, nei limiti di approssimazione con cui erano ottenute, con le soluzioni date in [2] e [3].

## SIMBOLI USATI.

$a$, $\lambda$ – Ampiezza e lunghezza dell'onda
$c$, $\omega$ – Celerità e pulsazione dell'onda
$\xi$, $\eta$ – Spostamenti orizzontali e verticali della particella
$x$ – Ascissa corrente
$t$ – Tempo
$g$ – Accelerazione di gravità
$\chi$ – Coefficiente di Chézy
$y$, $b$ – Profondità e larghezza dell'alveo.

## BIBLIOGRAFIA.

[1] G. PEZZOLI, *La propagazione delle onde nei canali a fondo orizzontale.* « Atti Acc. Scienze di Bologna » (1956).

[2] J. LAMOEN, *Sur l'hydraulique des fleuves à marée.* « Revue générale de l'hydraulique » (1936).

[3] G. PEZZOLI, *L'attenuazione delle onde negli alvei a fondo orizzontale.* IV Convegno Italiano di Idraulica, Padova 1959.

[4] G. PEZZOLI, *Meccanica non lineare delle onde di traslazione nei canali,* « Ren. Acc. Naz. Lincei » (1966).

[5] G. SUPINO, *The equation of wave propagation in channels.* NATO Adv. Inst. on « Surface Hydrodynamics » (1966).

[6] N. BOGOLIUBOV e I. MITROPOLSKI, *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires* (1962).

[7] G. PEZZOLI, *Influenza della forma del fondo sui moti ondosi.* XI Congresso Italiano di Idraulica (1968).