Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Sulle onde d'urto in un plasma in eccitazione elettronica soggetto a un campo elettromagnetico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.5, p. 499–507.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_5_499_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Dinamica del plasma. — *Sulle onde d'urto in un plasma in eccitazione elettronica soggetto a un campo elettromagnetico.* Nota [(*)] del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we consider the motion of a hot plasma in an electromagnetic field, on the assumption that the ions are at rest, that the effect of the electron-ion collisions is negligible and that the action of the electrons is equivalent to an isotropic pressure. On the supposition that a shock wave forms in the plasma, we establish the equations of discontinuity, through the shock layer, relative to electron velocity and density and the electrical and magnetic fields.

The results obtained are applied to the case of a plane shock wave that advances in a plasma at rest, and we determine the cases and conditions in which a shok wave can arise.

1. In questa Nota considero le equazioni del moto (non linearizzate) di un plasma, soggetto a un campo elettromagnetico, nel caso in cui gli ioni si possano ritenere fermi, che sia trascurabile l'effetto degli urti elettrone-ioni, e che l'azione degli elettroni, in agitazione termica, sia equivalente ad una pressione isotropica, proporzionale al numero di densità degli elettroni. Supposto che nel mezzo elettronico, inizialmente in quiete, si formi un'onda d'urto, mediante applicazione del principio di conservazione della massa, del teorema della quantità di moto e dell'equazione dell'energia, vengono dedotte, dalle equazioni del moto e del campo elettromagnetico, le equazioni di discontinuità, attraverso lo strato d'urto, della velocità, del numero di densità, del campo elettrico, e del campo magnetico. Per quest'ultimo si trova la proprietà ben nota che la componente normale del campo magnetico è continua attraverso lo strato d'urto.

I risultati ottenuti vengono applicati al caso di un'onda d'urto piana che avanza in un plasma a riposo, e mediante una analisi approfondita si determinano i casi e le condizioni sotto le quali è possibile la formazione di un'onda d'urto. Uno di questi casi si ha quando l'intensità del campo magnetico è sufficientemente debole; un'altra possibilità si ha invece quando il campo magnetico è insufficientemente intenso.

2. Le equazioni (non linearizzate) del campo elettromagnetico e del moto di un plasma, nelle condizioni indicate, sono [(1)]:

$$(1) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \boldsymbol{H}) \qquad\qquad (4) \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) + e\nu = 0$$

$$(2) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + e\nu\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) \qquad\qquad (5) \qquad \operatorname{div}(\nu\boldsymbol{v}) + \frac{\partial\nu}{\partial t} = 0$$

$$(3) \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \qquad\qquad (6) \qquad m\nu\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + mv_0^2 \operatorname{grad} \nu + e\nu(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \mu_0 \boldsymbol{H}) = 0 ,$$

(*) Presentata nella seduta del 9 maggio 1970.

(1) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sulla propagazione di onde piane in un plasma* etc. Questi « Rendiconti », vol. XLVIII, marzo 1970.

dove $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ sono i vettori del campo elettrico e del campo magnetico, ε_0, μ_0 la costante dielettrica e la permeabilità magnetica nel vuoto, $\boldsymbol{v}$ è la velocità media elettronica, m la massa e $-e$ la carica di un elettrone, ν il numero di densità elettronica durante il movimento, v_0 una velocità connessa con l'agitazione termica degli elettroni.

Ciò premesso supponiamo che nel campo in cui si muove una corrente di plasma si stabilisca un'onda d'urto costituita da uno *strato di transizione* paragonabile a una superficie di discontinuità.

Per stabilire le equazioni di discontinuità attraverso il fronte d'urto ricordiamo intanto che se $F(x, y, z, t)$ è una funzione derivabile definita in una regione dello spazio contenente il dominio $D(t)$, limitato dalla superficie $S(t)$, variabile col tempo t, si ha (2)

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{D(t)} F\,d\tau = \iiint\limits_{D(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\,d\tau + \iint\limits_{S(t)} F\cdot \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n}\,d\sigma\,, \tag{7}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale *esterna* alla superficie $S(t)$, e $\boldsymbol{V}$ è la velocità dei punti di $S(t)$.

Inoltre se il dominio $D(t)$ comprende nel suo interno una porzione arbitraria $s(t)$ dello strato d'urto, attraverso il quale supponiamo che la funzione F sia discontinua, e si passa al limite quando il detto dominio si riduce a questa porzione di strato, si ha

$$\lim \frac{d}{dt}\iiint\limits_{D(t)} F\,d\tau = \iint\limits_{s(t)} F_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V})\times\boldsymbol{n}\,d\sigma - \iint\limits_{s(t)} F_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V})\times\boldsymbol{n}\,d\sigma\,, \tag{8}$$

dove F_1, F_2 sono i valori di F, e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ i valori della velocità della corrente, a valle e a monte del fronte d'urto.

Le relazioni (7) ed (8) sussistono ovviamente anche se in luogo di una funzione scalare F si ha una grandezza vettoriale.

3. Osserviamo che dall'equazione (5) di continuità, tenuto conto della (7), ove si ponga $F = \nu$, si deduce

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{D(t)} \nu\,d\tau = 0\,.$$

che esprime il principio di conservazione della massa contenuta nel volume $D(t)$. Allora, in virtù della (8), per $F = \nu$, si ottiene

$$\iint\limits_{s(t)} \nu_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V})\times\boldsymbol{n}\cdot d\sigma - \iint\limits_{s(t)} \nu_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V})\times\boldsymbol{n}\cdot d\sigma = 0\,, \tag{9}$$

(2) C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Cap. VI, § 4, Edizioni Cremonese, Roma 1966.

e per l'arbitrarietà della porzione $s(t)$ di superficie d'urto, in ogni punto di questa superficie si avrà

$$(I) \qquad \nu_2 (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} - \nu_1 (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} = 0 ,$$

che è l'equazione di discontinuità derivante dal principio di conservazione della massa.

4. Dall'equazione (6) del moto ricaviamo ora

$$(10) \qquad \iiint\limits_{D(t)} m\nu \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \, d\tau + \iiint\limits_{D(t)} m v_0^2 \operatorname{grad} \nu \, d\tau + \iiint\limits_{D(t)} e\nu (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \mu_0 \boldsymbol{H}) \, d\tau = 0$$

e risulta

$$(11) \qquad \iiint\limits_{D(t)} \nu \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \, d\tau = \iiint\limits_{D(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\nu \boldsymbol{v}) \, d\tau + \iint\limits_{S(t)} \nu \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \, d\sigma = \frac{d}{dt} \iiint\limits_{D(t)} \nu \boldsymbol{v} \cdot d\tau ,$$

$$(12) \qquad \iiint\limits_{D(t)} \operatorname{grad} \nu \cdot d\tau = \iint\limits_{S(t)} \nu \boldsymbol{n} \cdot d\sigma .$$

Dalla (4), tenendo conto della (1) e della (2), e introducendo le *diadi* $(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$, $(\mu_0 \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H})$, si ha successivamente

$$\begin{aligned} e\nu \boldsymbol{E} &= - \operatorname{div} (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{E} = - \operatorname{grad} (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) + \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \wedge \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) = \\ &= \operatorname{grad} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 - (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) \right\} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{E} = \\ &= \operatorname{grad} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 - (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 - (\mu_0 \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}) \right\} - \\ &\qquad - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}) - e\nu \boldsymbol{v} \wedge \mu_0 \boldsymbol{H} , \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} e\nu (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \mu_0 \boldsymbol{H}) = \operatorname{grad} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 - (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) - (\mu_0 \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}) \right\} - \\ - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}) . \end{aligned}$$

Integrando rispetto al dominio $D(t)$, e avendo riguardo alla (7), si ricava

$$\begin{aligned} (13) \qquad & \iiint\limits_{D(t)} e\nu (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \mu_0 \boldsymbol{H}) \, d\tau = \\ &= \iint\limits_{S(t)} \left\{ \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \boldsymbol{n} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} - \mu_0 \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H} \right\} d\sigma - \\ &- \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iiint\limits_{D(t)} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E} \, d\tau + \varepsilon_0 \mu_0 \iint\limits_{S(t)} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot d\tau . \end{aligned}$$

Sostituendo (11), (12) e (13) nella (10), abbiamo

$$(14) \qquad \frac{d}{dt}\iiint_{D(t)} m\nu \boldsymbol{v}\, d\tau + \iint_{S(t)} mv_0^2 \cdot \nu \boldsymbol{n}\, d\sigma +$$

$$+ \iint_{S(t)} \left\{ \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)\, \boldsymbol{n} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} - \mu_0 \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H} \right\} d\sigma -$$

$$- \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iiint_{D(t)} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}\, d\tau + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_{S(t)} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma = 0\,.$$

Passando al limite, facendo tendere il dominio $D(t)$, allo strato $s(t)$, e applicando la (8), dopo alcune semplificazioni si ottiene

$$(15) \qquad \iint_{s(t)} \{ m\nu_2\, \boldsymbol{v}_2 \cdot (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} - m\nu_1\, \boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} \}\, d\sigma +$$

$$+ \iint_{s(t)} mv_0^2 (\nu_2 - \nu_1)\, \boldsymbol{n}\, d\sigma + \iint_{s(t)} \left\{ \frac{1}{2} [\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2]_1^2 \cdot \boldsymbol{n} - \right.$$

$$\left. - [\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} + \mu_0 \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}]_1^2 \right\} d\sigma + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_{s(t)} [\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}]_1^2 \cdot \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma = 0\,,$$

dalla quale, per l'arbitrarietà della porzione di strato $s(t)$, si deduce

$$(\mathrm{II}) \qquad m\nu\, \boldsymbol{v}_2 \cdot (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} - m\nu_1\, \boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{n} + mv_0^2 (\nu_2 - \nu_1)\, \boldsymbol{n} +$$

$$+ \frac{1}{2} [\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2]_1^2 \boldsymbol{n} - [\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} + \mu_0 \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}]_1^2 +$$

$$+ \varepsilon_0 \mu_0 [\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}]_1^2 \cdot \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{n} = 0\,,$$

che è l'equazione di discontinuità derivante dal teorema della quantità di moto.

4. Consideriamo ora l'equazione dell'energia (3)

$$(16) \qquad m\nu\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathcal{E} \times \boldsymbol{v}\right) = - \operatorname{div}(mv_0^2 \nu \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{I}\,,$$

dove $\mathcal{E}$ è l'energia totale riferita all'unità di massa, somma dell'energia cinetica e dell'energia interna. Ritenendo costante l'energia interna, possiamo porre $\mathcal{E} = \frac{1}{2} v^2$. Inoltre la densità di corrente elettronica è data da $\boldsymbol{I} = -e\nu\boldsymbol{v}$, e allora l'equazione precedente diventa

$$(17) \qquad m\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} v^2\right) + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) \times \boldsymbol{v} \right\} + \operatorname{div}(mv_0^2 \nu \boldsymbol{v}) + e\nu \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} = 0\,,$$

(3) C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica, Loco citato* in (2), Cap. II, § 2, n. 4.

che per l'equazione (5) di continuità si può scrivere

$$(18)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\, m\nu v^2\right) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2} m v^2 \cdot \nu \boldsymbol{v} + m v_0^2 \cdot \nu \boldsymbol{v}\right) + e\nu \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} = 0 \,.$$

D'altra parte, moltiplicando ambo i membri della (2) scalarmente per $\boldsymbol{E}$, si ricava

$$\begin{aligned} e\nu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} &= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2\right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{E}) - \operatorname{rot}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \mathrm{H}^2\right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{E})\,. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (18), e integrando rispetto al dominio D (t), si ha

$$(19)\qquad \iiint_{\mathrm{D}(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}m\nu v^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mathrm{H}^2\right\} + \\ + \iint_{\mathrm{S}(t)}\left\{\frac{1}{2}mv^2\cdot\nu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n} + mv_0^2\cdot\nu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n} - \boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\right\}d\sigma = 0\,,$$

cioè, per la (7), dopo qualche semplificazione si ottiene

$$(20)\qquad \frac{d}{dt}\iiint_{\mathrm{D}(t)}\left\{\frac{1}{2}m\nu v^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathrm{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mathrm{H}^2\right\}d\tau - \\ - \iint_{\mathrm{S}(t)}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathrm{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mathrm{H}^2\right\}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\,d\sigma + \iint_{\mathrm{S}(t)}\{mv_0^2\cdot\nu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n} - \boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\}\,d\sigma = 0\,.$$

Passando al limite, applicando la formula (8), col solito procedimento e alcune ulteriori semplificazioni, si perviene all'equazione

$$(\mathrm{III})\qquad \frac{1}{2}m\nu_2 v_2^2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V})\times\boldsymbol{n} - \frac{1}{2}mv_1^2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V})\times\boldsymbol{n} + mv_0^2(\nu_2\boldsymbol{v}_2 - \nu_1\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{n} - \\ - \frac{1}{2}[\varepsilon_0\mathrm{E}^2 + \mu_0\mathrm{H}^2]_1^2\cdot\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n} - [\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{E}]_1^2\times\boldsymbol{n} = 0\,,$$

che è l'equazione di discontinuità derivante dal teorema dell'energia.

5. Integrando infine ambo i membri della (1) rispetto al dominio D (t), si ottiene facilmente

$$(21)\qquad \iint_{\mathrm{S}(t)}\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}\,d\sigma = \iint_{\mathrm{S}(t)}\mu_0\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot d\sigma - \frac{d}{dt}\iiint_{\mathrm{D}(t)}\mu_0\boldsymbol{H}\cdot d\tau\,,$$

e passando al limite si deduce

$$(\mathrm{IV})\qquad \boldsymbol{n}\wedge[\boldsymbol{E}]_1^2 = \mu_0[\boldsymbol{H}]_1^2\cdot\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n}\,,$$

che è l'ulteriore equazione di discontinuità derivante dalle equazioni di Maxwell.

Dalla (IV) si ricava subito $[H_n]_1^2 = 0$, si ha cioè la proprietà ben nota che la componente del campo magnetico normale al fronte d'urto, è continua attraverso lo strato d'urto.

Se indichiamo semplicemente con V la componente normale della velocità di avanzamento del fronte d'urto, e con l'indice n le componenti normali della velocità elettronica, del campo elettrico e del campo magnetico, le equazioni di discontinuità (I), (II), (III) e (IV) si possono scrivere anche:

$$\text{(V)}\quad \begin{aligned} &[\nu(v_n - V)]_1^2 = 0 \\ &[m\nu(v_n - V)\cdot \boldsymbol{v}]_1^2 + m v_0^2 [\nu]_1^2 \boldsymbol{n} + \frac{1}{2}[\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2]_1^2 \boldsymbol{n} - \\ &\qquad - [\varepsilon_0 E_n \cdot \boldsymbol{E} + \mu_0 H_n \cdot \boldsymbol{H}]_1^2 + \varepsilon_0 \mu_0 [\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{E}]_1^2 \cdot V = 0 \\ &\frac{1}{2} m[\nu v^2 (v_n - V)]_1^2 + m v_0^2 [\nu v_n]_1^2 - \frac{1}{2}[\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2]_1^2 \cdot V - [\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}]_1^2 = 0 \\ &\boldsymbol{n}\wedge[\boldsymbol{E}]_1^2 = \mu_0 [\boldsymbol{H}]_1^2 \cdot V . \end{aligned}$$

6. Applichiamo ora i risultati ottenuti al caso di un'onda d'urto piana che avanza in un plasma a riposo. Sia allora $v_1 = v$ la velocità a valle, e $v_2 = 0$ quella a monte. Supponiamo inoltre che il campo elettrico e il campo magnetico siano ortogonali fra loro e paralleli al fronte d'urto. Se scegliamo l'asse x nella direzione della corrente possiamo porre

$$E_x = 0 \ , \ E_y = E \ , \ E_z = 0 \quad ; \quad H_x = 0 \ , \ H_y = 0 \ , \ H_z = H \ , \tag{22}$$

e il sistema di equazioni (V) si riduce al seguente

$$\nu_2 V = \nu_1 (V - v) \tag{23}$$

$$m\nu_1 (V - v) v + m v_0^2 (\nu_2 - \nu_1) + \frac{1}{2}[\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2]_1^2 - \varepsilon_0 \mu_0 [HE]_1^2 V = 0 \tag{24}$$

$$\frac{1}{2} m\nu_1 v^2 (V - v) - m v_0^2 \nu_1 v - \frac{1}{2}[\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2]_1^2 V + [HE]_1^2 = 0 \tag{25}$$

$$[E]_1^2 = \mu_0 V [H]_1^2 . \tag{26}$$

Ponendo

$$X = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{V}{V - v} \quad , \quad Y = \frac{E_1}{E_2} \quad , \quad Z = \frac{H_1}{H_2} , \tag{27}$$

le equazioni (24), (25) e (26) diventano

$$\begin{aligned} &m\nu_2 V^2 \left(1 - \frac{1}{X}\right) + m v_0^2 \nu_2 (1 - X) + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 (1 - Y^2) + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\mu_0 H_2^2 (1 - Z^2) - \varepsilon_0 \mu_0 H_2 E_2 V (1 - YZ) = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} m\nu_2 V^3 \left(1 - \frac{1}{X}\right)^2 - m v_0^2 \nu_2 V (X - 1) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 V (1 - Y^2) - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\mu_0 H_2^2 V (1 - Z^2) + H_2 E_2 (1 - YZ) = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

$$1 - Y = \frac{\mu_0 V H_2}{E_2}(1 - Z) , \tag{30}$$

che è un sistema di tre equazioni in X, Y, Z. Per ridurci a un'equazione in cui è incognita la sola X, osserviamo intanto che sommando la (29), con la (28) moltiplicata per V, si ha

$$(31) \qquad \left(1 - \frac{1}{X}\right)\left(3 - \frac{1}{X}\right) - 4\alpha(X-1) + M(1 - YZ) = 0 .$$

Inoltre, moltiplicando la (29) per $\varepsilon_0 \mu_0 V$, e sommando con la (28), si ottiene

$$(32) \qquad \left(1 - \frac{1}{X}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{1}{X}\right)\right] - \alpha(1+\beta)(X-1) + \\ + N(1 - Y^2) + P(1 - Z^2) = 0 ,$$

dove si è posto

$$(33) \qquad \begin{aligned} &\alpha = \frac{v_0^2}{V^2} \quad , \quad \beta = \frac{V^2}{c^2} \quad , \quad M = 2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{H_2 E_2}{m\nu_2 V^3} \\ &N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\varepsilon_0 E_2^2}{m\nu_2 V^2} \quad , \quad P = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\mu_0 H_2^2}{m\nu_2 V^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{V_a^2}{V^2} , \end{aligned}$$

essendo $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$ il quadrato della velocità della luce nel vuoto, e $V_a = H_2 \sqrt{\mu_0/(m\nu_2)}$ la velocità delle onde di Alfvén.

Alle equazioni (28) e (29) possiamo allora sostituire le (31) e (32), alle quali va associata la (30), dove porremo ancora

$$(34) \qquad Q = \frac{\mu_0 V H_2}{E_2} .$$

Ricavando dalla (30) i valori di $1 - YZ$ e di $1 - Y^2$, in funzione di $\zeta = 1 - Z$, e sostituendo nelle (31) e (32), si hanno le equazioni

$$(35) \qquad \begin{aligned} \xi &\equiv \left(1 - \frac{1}{X}\right)\left(3 - \frac{1}{X}\right) - 4\alpha(X-1) = M\zeta\,[Q\zeta - (Q+1)] \equiv \\ &\equiv \zeta\,[4P\cdot\zeta - M(Q+1)] \\ \eta &\equiv \left(1 - \frac{1}{X}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{1}{X}\right)\right] - \alpha(1+\beta)(X-1) = \\ &= \zeta\,[(NQ^2 + P)\zeta - 2(NQ + P)] , \end{aligned}$$

dove per semplicità si sono indicati con ξ, η i primi membri.

È bene osservare che fra le quantità M, N, P, Q sussistono le relazioni

$$(36) \qquad MQ = 4P \quad , \quad NQ = \frac{1}{4}\beta M \quad , \quad NQ^2 = \beta P .$$

Eliminando ζ^2 fra le (35) si ricava

$$(37) \qquad \zeta = \frac{(1+\beta)\xi - 4\eta}{(1-\beta)M(Q-1)} .$$

Sostituendo nella prima delle (35), riducendo a forma intera, ed escludendo la radice $X = 1$, che corrisponde al caso in cui non vi è urto, si ha infine l'equazione

$$f(X) \equiv (X - 1)(X + 1)^2 + \frac{2M}{Q}(Q - 1)X^2\{2\alpha(Q - 1)X^2 + (2 - Q)X + Q\} = 0, \tag{38}$$

che è di 4° grado in X, e si tratta di vedere se ammette radici maggiori di 1. Il coefficiente di X^4 è positivo e quindi il $\lim_{X \to \pm\infty} f(X) = +\infty$. Si ha inoltre $f(0) = -1$, e pertanto la (38) ammette certamente una radice negativa che va scartata, e una radice positiva.

Per $X = 1$ si ha

$$f(1) = \frac{4M}{Q}(Q - 1)[1 + \alpha(Q - 1)], \tag{39}$$

e risulta $f(1) < 0$ per

$$\alpha > 1 \quad , \quad \frac{\alpha - 1}{\alpha} < Q < 1 \,; \qquad \text{oppure per} \quad 0 < \alpha < 1 \,, \quad 0 < Q < 1 \,. \tag{40}$$

In questi casi si ha certamente una radice della (38) maggiore di 1, e quindi una possibile onda d'urto, che può realizzarsi quando il campo magnetico è sufficientemente debole.

Se $1 < Q \leq 2$, risulta $f(X) > 0$ per $X \geq 1$, e in questo caso non esiste alcuna radice della (38) maggiore di 1, e pertanto non può aversi onda d'urto.

Per vedere ora se la (38) ammette una radice maggiore di 1 per $Q > 2$, poniamo $Q = q + 2$, con che la (38) diventa

$$f(X) \equiv (X - 1)(X + 1)^2 + \frac{2M}{q+2}(q + 1)X^2[2\alpha(q + 1)X^2 - qX + q + 2] = 0. \tag{41}$$

Affinché questa equazione ammetta una radice maggiore di 1, è necessario intanto che per $X > 1$ sia

$$2\alpha(q + 1)X^2 - qX + q + 2 < 0. \tag{42}$$

Ciò sarà possibile se gli zeri del primo membro sono reali e quindi

$$(1 - 8\alpha)q^2 - 24\alpha q - 16\alpha > 0. \tag{43}$$

Occorre allora che sia

$$\alpha < \frac{1}{8} \quad , \quad q > 4\{3\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 1)}\}/(1 - 8\alpha). \tag{44}$$

In questo caso detti X_1, X_2, $(X_1 < X_2)$, gli zeri del primo membro della (42), con

$$\left.\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \{q \mp \sqrt{q^2 - 8\alpha(q + 1)(q + 2)}\}/[4\alpha(q + 1)] \tag{45}$$

la (42) è verificata per $X_1 < X < X_2$. Consideriamo il valore medio

$$X^* = (X_1 + X_2)/2 = q/[4\alpha(q+1)] \,,$$

e osserviamo intanto che per valori di α e q soddisfacenti alle (44) risulta, come si verifica facilmente, $X^* > 1$.

Allora se $f(X^*) < 0$ avremo una radice della (41) maggiore di X^*, e quindi maggiore di 1. Ora dalla (41) si ha $f(X^*) < 0$ se

$$M > \frac{4\alpha(q+2)(X^*-1)(X^*+1)^2}{X^{*2}[q^2-8\alpha(q+1)(q+2)]} \,. \tag{46}$$

Concludendo, se i valori di α e q verificano le relazioni (44), ed è soddisfatta la condizione (46), si ha, per

$$Q > 2 + 4\{3\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+1)}\}/(1-8\alpha) \,,$$

e quindi per campi magnetici sufficientemente intensi, una radice della (41) maggiore di $X^* > 1$, e quindi una possibile onda d'urto.