Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Xavier Hubaut

Limitation du nombre de points d'un (k, n)-arc regulier d'un plan projectif fini

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.5, p. 490–493.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_5_490_0>

Geometria. — *Limitation du nombre de points d'un* (k, n)*–arc regulier d'un plan projectif fini.* Nota di XAVIER HUBAUT, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — In un piano proiettivo finito definiscesi $\{k, n\}$–arco regolare un insieme di k punti che ammette delle n–secanti e tale che ogni retta lo incontra in $0, 1$, ovvero n punti soltanto. Vengono provate delle limitazioni per k relativamente ad un arco siffatto.

1. INTRODUCTION.

On appelle $\{k, n\}$–arc [1], un ensemble de k points d'un plan projectif fini tel que toute droite ait en commun au plus n points avec cet ensemble et qu'il existe une droite ayant exactement n points en commun avec l'ensemble. Un $\{k, n\}$–arc est dit *régulier* si chaque droite le rencontre en $0, 1$ ou n points; ces droites sont respectivement appelées non sécantes, tangentes et sécantes; dans la terminologie introduite en [7] ce sont des $\{k, n\}$–arcs de type $(0, 1, n)$, de type $(0, n)$ ou de type $(1, n)$. A tout $\{k, n\}$–arc régulier est associé un système de Steiner $S(2, n; k)$, inversément un système de Steiner donne naissance, lorsqu'il est plongeable dans un plan projectif, à un $\{k, n\}$–arc régulier.

De même l'étude de sous–ensembles du plan projectif sur lesquels opère un groupe 2–transitif de collinéations [2] se remène à la détermination de certains types de $\{k, n\}$–arc réguliers.

Dans la suite nous considérerons toujours des $\{k, n\}$–arcs réguliers. En 1966, Tallini–Scafati a donné entre autre une limitation du nombre de points d'un $\{k, n\}$–arc d'un plan d'ordre q [7]. Nous déterminons d'autres limitations du nombre de points; plus précisément nous démontrons les deux théorèmes:

THÉORÈME 1. *Pour un* $\{k, n\}$*–arc avec* $n > 4$, *l'une des deux inégalités suivantes est satisfaite*:

$$k - 1 < \frac{3}{2}(q - 1),$$

$$(n - 1)(q + 1) - \frac{q - 3}{2} < k - 1 \leq (n - 1)(q + 1).$$

THÉORÈME 2. *Pour un* $\{k, n\}$*–arc à tangentes on a*:

$$k - 1 \leq q\sqrt{q}.$$

Nous remercions M. Jean Doyen qui nous a fourni de précieux renseignements bibliographiques et Mme Tallini Scafati pour les conseils donnés pendant la rédaction de cette Note.

(*) Nella seduta del 9 maggio 1970.

2. Quelques formules.

Du système (1), (2), (3) [7], un calcul élémentaire donne respectivement les nombres de

sécantes $$S = \frac{k(k-1)}{n(n-1)},$$

tangentes $$T = k\left|q + 1 - \frac{k-1}{n-1}\right|,$$

non sécantes $$R = q^2 + q + 1 - k(q+1) + \frac{k(k-1)}{n}.$$

3. Rappel de quelques résultats connus.

1) *$\{k, n\}$-arcs sans tangente de type* $(1, n)$ [7].

La condition $T = 0$ donne $q + 1 = \dfrac{k+1}{n-1}$.

1 a) Pour $n = q + 1$ on a le plan projectif.

1 b) Si K est un $\{k, n\}$-arc proprement dit sans tangente (c'est-à-dire $n < q + 1$), par un point extérieur passent s sécantes de n points: il en résulte que $k = ns$.

Aux $\{k, n\}$-arcs réguliers sans tangentes correspondent des systèmes de Steiner $S(2, n; q(n-1) + n)$ avec $q \equiv 0 \pmod{n}$ [1]. En particulier pour $n = q$, on obtient $S(2, q, q^2)$ c'est-à-dire un plan affin d'ordre q. Pour $n = 2$ (dans ce cas q est pair) on obtient $S(2, 2, q+2)$ et le $\{k, 2\}$-arc est la réunion d'un ovale et de son noyau. Pour $n = q/2$ le système $S\left(2, \frac{q}{2}, \frac{q(q-1)}{2}\right)$ est le dual du précédent: les points sont les non-sécantes et les droites sont les points du plan n'appartenant pas à l'ovale [5]. D'une manière générale à tout système sans tangente est associé un système dual du type décrit ci-dessus.

On ignore s'il existe d'autres arcs de ce type, en particulier pour les plus petites valeurs de n et q, respectivement 3 et 9, on n'a pas pu prouver l'existence d'un $S(2, 3, 21)$ dans un plan d'ordre 9. Si cet arc existe on a démontré [3] que le plan ne peut pas être arguésien.

2) *$\{k, n\}$-arcs sans non-sécantes, de type* $(1, n)$.

La condition $R = 0$ donne

$$q^2 + q + 1 - k(q+1) + \frac{k(k-1)}{n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$nq^2 - nq(k-1) + (k-1)(k-n) = 0,$$

or

$$k - 1 \equiv 0 \pmod{n-1} \qquad \text{et} \quad nq^2 \equiv 0 \pmod{k-1},$$

d'où $nq^2 \equiv 0 \pmod{n-1}$ et par suite $q^2 \equiv 0 \pmod{n-1}$. Dans [7] prop. VIII (p. 1022) on a prouvé entre autre: si $q = p^r$, à l'exception du plan projectif, deux cas sont possibles:

2 a) Un système $S(2, \sqrt{q}, q\sqrt{q}+1)$. Un exemple en est fourni par les courbes d'Hermite d'équation $X\bar{X} + Y\bar{Y} + Z\bar{Z} = 0$ d'un plan de Galois d'ordre p^{2s} [4].

On ignore s'il existe d'autres arcs de ce type.

2 b) Un système $S(2, \sqrt{q}+1, q+\sqrt{q}+1)$: il s'agit d'un sous-plan de Baer, d'ordre p^s d'un plan d'ordre p^{2s}.

4. Limitation de nombre de points d'un $\{k, n\}$–arc régulier.

A) Une première limitation triviale est donnée par la relation $T \geq 0$, c'est-à-dire $k-1 \leq (n-1)(q+1)$.

La relation $R \geq 0$ donne

$$k^2 - k(nq+n+1) + nq^2 + nq + n \geq 0 .$$

Calculons le discriminant de cette fonction du second degré en k:

$$\delta = n(n-4)q^2 + 2n(n-1)q + (n-1)^2 .$$

Un calcul élémentaire montre que si $n > 4$, on a

$$\delta > |(n-3)q + n + 2|^2 .$$

On en conclut que l'une des deux inégalités suivantes est vérifiée

$$k < \frac{3q-1}{2}, \qquad \text{ou} \quad k > \frac{1}{2}|(2n-3)q + 2n + 3| .$$

Théorème 1. *Pour un $\{k, n\}$–arc régulier d'un plan d'ordre q l'une des deux inégalités suivantes est satisfaite, si $n > 4$:*

$$(n-1)(q+1) - \frac{q-3}{2} < k-1 \leq (n-1)(q+1) ,$$

ou

$$k-1 < \frac{3}{2}(q-1) .$$

B) Supposons que l'arc possède au moins une tangente en un point, et par suite, en tout point. (Les arcs de type $(1, n)$ étant déterminés [7]).

Par un point de l'arc passent $\frac{k-1}{n-1}$ sécantes. Posons

$$\frac{k-1}{n-1} = q - \alpha \qquad \text{avec} \quad \alpha \geq 0 .$$

Exprimons la condition $R \geq 0$; après calculs il vient

$$(n-1)^2(\alpha+1)(q-\alpha) - (n-1)\alpha q - q^2 \leq 0 .$$

En posant $q^2\Delta^2 = q^2 \,|\, \alpha^2 + 4(\alpha + 1)(q - \alpha) \,|$, on a

$$\frac{\alpha - \Delta}{2(\alpha + 1)(q - \alpha)} \leq n - 1 \leq q \frac{\alpha + \Delta}{2(\alpha + 1)(q - \alpha)} .$$

La limitation inférieure est sans intérêt car $n - 1 > 0$. En multipliant par $q - \alpha$ on obtient:

$$k - 1 \leq \frac{q(\alpha + \Delta)}{2(\alpha + 1)} ,$$

or $\frac{\alpha + \Delta}{2(\alpha + 1)} \leq \sqrt{q}$; en effet pour $\alpha = 0$ l'égalité est vérifiée.

Supposons $\alpha > 0$:

$$\frac{\alpha + \Delta}{2(\alpha + 1)} \geq \sqrt{q} \iff \alpha + \Delta \geq 2(\alpha + 1)\sqrt{q} \iff \Delta \geq 2(\alpha + 1)\sqrt{q} - \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + 4(\alpha + 1)(q - \alpha) \geq 4(\alpha + 1)^2 q + \alpha^2 - 4\alpha(\alpha + 1)\sqrt{q} \iff$$

$$\alpha(\alpha + 1)\sqrt{q} \geq \alpha(\alpha + 1)(q + 1) \Rightarrow \sqrt{q} \geq q + 1$$ ce qui est impossible:

si $\alpha > 0$ on a $\frac{\alpha + \Delta}{2(\alpha + 1)} < \sqrt{q}$.

On a donc quel que soit α le

THÉORÈME 2. *Pour un $\{k , n\}$-arc à tangentes on a*:

$$k - 1 \leq q\sqrt{q} \qquad \text{(N)} ,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que pour la valeur $\alpha = 0$, ce qui correspond à un arc hermitien [7].

En particulier, ce résultat fournit des renseignements pour la détermination d'ensembles de points d'un plan projectif sur lesquels opère un groupe 2-transitif, on voit qu'il ne peut s'agir que de $\{k , n\}$-arcs réguliers sans tangentes ou alors que l'inégalité (N) est satisfaite.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. BARLOTTI, *Sui $\{k, n\}$-archi di un piano lineare finito.* « Boll. U.M.I. », (3), *11*, 553–556 (1956).

[2] J. COFMAN, *Double transitivity in finite affine and projective planes.* « Proc. Proj. Geometry Conference », Univ. of Ill. Chicago, 16–19 (1967).

[3] A. COSSU, *Su alcune proprietà dei $\{k , n\}$-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito.* « Rend. Mat. e Appl. », (5), *20*, 271–277 (1961).

[4] B. SEGRE, *Forme e geometrie hermitiane con particolare riguardo al caso finito.* « Ann. Mat. Pura ed appl. », (4), *70*, 1–202 (1965).

[5] E. SEIDEN, *On a method of construction of partial geometries and partial Bolyai–Lobatchewsky planes.* « Amer. Math. Monthly », *73*, 158–161 (1966).

[6] M. TALLINI-SCAFATI, *Sui $\{k , n\}$-archi di un piano grafico finito.* « Acc. Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat. », *40*, 373–378 (1966).

[7] M. TALLINI-SCAFATI, *$\{k , n\}$-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri.* « Acc. Lincei, Rend. Sc. fis. mat. e nat. », *40*, 812–817 et 1020–1025 (1966).