
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GHEORGHE GHEORGHIEV, MARGARETA IGNAT

**Su alcuni moti intrinseci notevoli nell'idrodinamica.
Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 48 (1970), n.4, p. 417–421.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_4_417_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Su alcuni moti intrinseci notevoli nell'idrodinamica.* Nota II di GHEORGHE GHEORGHIEV e MARGARETA IGNAT, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — By the mobile frame method, the helicoidal and quasirigid motions of fluids are studied, establishing the existence and arbitrariness of the solutions for incompressible, ideal and viscous fluids in permanent and non-permanent regime. To the quasirigid motions intrinsically a linear complex of lines is attached.

4. MOTI ELICOIDALI.

Continuando nelle applicazioni dei risultati della Nota I, osserviamo che le equazioni dell'idrodinamica (10) si possono pure scrivere sotto la forma:

$$(10') \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \nabla L' + \frac{(\mu' + \lambda')}{\rho} \nabla \text{div } \mathbf{v} + \frac{\mu'}{\rho} \Delta \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

dove $L' = U - P - \frac{v^2}{2}$. Da qui risulta una nuova possibilità di semplificazione per l'equazione del moto (10') se si considerano i moti di Beltrami [1].

Definizione 2. Si dice che un moto è elicoidale [2] se ha luogo la relazione:

$$(16) \quad \text{rot } \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

dove, in generale, λ è una funzione scalare $\neq 0$ che possiede una interpretazione geometrica notevole. Quando $\lambda = \text{cost.}$, $\mathbf{v}$ forma un campo Beltrami-Gromeka [5] e allora $\text{rot}'' \mathbf{v} = \lambda'' \mathbf{v}$.

Prendendo come di solito $\mathbf{v} = v \mathbf{I}_3$, avremo [3]:

$$\text{rot } \mathbf{v} = (vp_3 + v_2) \mathbf{I}_1 + (vq_3 - v_1) \mathbf{I}_2 - v(p_1 + q_2) \mathbf{I}_3.$$

Dalla (16) risulta che:

$$(17) \quad (\ln v)_1 = q_3, \quad (\ln v)_2 = -p_3$$

e dunque:

$$(18) \quad \text{rot } \mathbf{v} = -i_1 \mathbf{v}.$$

Di qui si vede che il fattore di proporzionalità nella (16) è proprio la torsione della varietà non olonoma ortogonale al campo $\mathbf{v}$.

(*) Nella seduta del 14 marzo 1970.

Partendo dalla (17) si ha:

$$(19) \quad \text{Grad} (\ln v) = - \kappa \mathbf{n},$$

dove Grad è la componente normale a $\mathbf{v}$, del gradiente di $\ln v$, e $\mathbf{n}$ è la normale principale delle linee vettoriali del campo $\mathbf{I}_3$. Quindi perché un campo di vettori sia elicoidale è necessario e sufficiente che abbia luogo la (19). Tenendo conto del fatto che per un fluido incompressibile $\text{div } \mathbf{v} = 0$, si ottiene: $(\ln v)_3 = p_2 - q_1$ e utilizzando anche (19) si arriva infine alla:

$$(20) \quad \nabla (\ln v) = q_3 \mathbf{I}_1 - p_3 \mathbf{I}_2 + (p_2 - q_1) \mathbf{I}_3.$$

Senza diminuire la generalità possiamo scegliere il riferimento così che $(\ln v)_1 = q_3 = 0$, e allora p_3 rappresenterà la curvatura delle linee di corrente.

Le condizioni di compatibilità relative all'esistenza dei campi elicoidali, per i fluidi incompressibili, si deducono esprimendo il fatto che nella (20) il rotore del campo del secondo membro è uguale a zero. Si trovano così le seguenti condizioni geometriche suggestive:

$$(p_1 + q_2)_3 = 0, \quad \text{Grad} (p_2 - q_1) = p_3 \{ (p_1 + r_3) \mathbf{I}_1 + [q_1 - (\ln p_3)_3] \mathbf{I}_2 \}.$$

La prima di queste mostra che il fattore di proporzionalità λ è lo stesso lungo una linea di corrente.

Nel caso del moto stazionario elicoidale di un fluido ideale, poiché $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla v^2}{2}$, l'equazione dinamica (10₁) non imporrà altre restrizioni. Quindi il problema dell'esistenza di alcune soluzioni regolari si riduce allo studio dell'involuzione del seguente sistema Pfaff:

$$p = p_1 \omega^1 + p_2 \omega^2, \quad q = q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2, \quad d \ln v = - p_3 \omega^3 + (\ln v)_3 \omega^3,$$

che avrà i caratteri: $s_0 = s_1 = s_2 = 3$. Se il fluido è incompressibile, allora $s_2 = 2$, mentre nel caso del movimento di Beltrami-Gromeka $s_2 = 1$. In questo modo il moto permanente elicoidale di un fluido ideale esiste e la soluzione generica, quando il fluido è compressibile, dipenderà da 3 funzioni; per un liquido incompressibile da due funzioni, e per un moto Beltrami-Gromeka solamente da una funzione; ci riferiamo a funzioni arbitrarie a due argomenti.

Nel caso dei fluidi viscosi nel regime permanente dall'equazione del moto (10₁) si ricava: $\text{rot}^3 \mathbf{v} = 0$. Dalla (18) risulta:

$$(21) \quad \text{rot}^2 \mathbf{v} = v (i_{1,1} \mathbf{I}_2 - i_{1,2} \mathbf{I}_1 + i_1^2 \mathbf{I}_3).$$

Se il fluido è incompressibile, allora dalle condizioni di integrabilità (4) si trova: $i_{1,3} = 0$. Scegliendo $\mathbf{I}_2$ così che $\text{grad } i_1 = \mu \mathbf{I}_2$, l'equazione (21) si riduce alla:

$$(22) \quad \text{rot}^2 \mathbf{v} = v (i_1^2 \mathbf{I}_3 - i_{1,2} \mathbf{I}_1)$$

e abbiamo evidentemente $p_1 + r_3 = 0$. Applicando il rotore alla (22) arriviamo alle seguenti condizioni di integrabilità:

$$i_{1,2} (2 i_1 + q_2 + r_3) = 0, \quad p_2 i_{1,2} = 0, \quad i_{1,2} - (p_3 + r_1) i_{1,2} - i_1^3 = 0.$$

Escludendo la possibilità dei moti Beltrami-Gromeka, cioè supponendo $i_{1,2} \neq 0$ dalle prime due relazioni si deduce:

$$2 i_1 + q_2 + r_3 = 0, \quad p_2 = 0.$$

Dalla condizione $p_1 + r_3 = 0$, segue che i moti elicoidali a regime permanente dei fluidi viscosi incompressibili determinano una famiglia di superfici di Bernoulli inviluppata dal piano dei vettori $\mathbf{v}$ e $\text{rot}^2 \mathbf{v}$; la normale a queste superfici è diretta secondo il gradiente dell'invariante $\lambda = \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{\mathbf{v}}$.

Di più, dalla $p_2 = 0$ segue che le linee vettoriali del campo $\nabla \lambda$ avranno la binormale collineare con $\mathbf{v}$, e dalla $p_1 + 3 q_2 = 0$ risulta che l'invariante è il doppio della torsione di queste linee; in ciò che riguarda la loro curvatura r_2 , essa verificherà la relazione cospicua:

$$(\ln r_2)_3 + q_1 = 0.$$

Il problema dell'esistenza si riduce allo studio del sistema:

$$p = p_1 \omega^1 + p_3 \omega^3, \quad q = q_1 \omega^1 - (p_1/3) \omega^2 + q_3 \omega^3,$$

$$r = r_1 \omega^1 + r_2 \omega^2 - p_1 \omega^3, \quad d \ln v = q_3 \omega^1 - p_3 \omega^2 - q_1 \omega^3.$$

Se ne ottiene immediatamente $s_0 = s_1 = 4$, $s_2 = 2$. Questo sistema ammetterà soluzioni regolari dipendenti da due funzioni a due argomenti.

5. MOTI QUASI-RIGIDI.

Come si sa, un'altra via di semplificazione per le equazioni della idrodinamica apparisce se il moto del fluido si suppone rotazionale, cioè:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{r}, \quad \text{dove } \mathbf{v} = v \mathbf{I}_3.$$

D'altronde è noto che questa relazione è equivalente al fatto che la parte simmetrica del tensore di deformazione della velocità si annulli; l'espressione di questo tensore adoperando il riferimento mobile è:

$$\dot{S} = \begin{pmatrix} vq_1 & (v/2)(q_2 - p_1) & (1/2)(v_1 + vq_3) \\ (v/2)(q_2 - p_1) & -vp_2 & (1/2)(v_2 - vp_3) \\ (1/2)(v_1 + vq_3) & (1/2)(v_2 - vp_3) & v_3 \end{pmatrix}.$$

Definizione 3. Si dice che un moto è quasi-rigido se ha luogo la relazione [4]: $\dot{S} = 0$.

Utilizzando l'espressione di $\dot{S}$ scritta sopra, si arriva alle:

$$(23) \quad q_1 = p_2 = p_1 - q_2 = 0 \quad , \quad v_3 = v_1 + vq_3 = v_2 - vp_3 = 0.$$

Le ultime tre condizioni possono essere scritte più brevemente sotto la forma:

$$\nabla (\ln v) = -q_3 \mathbf{I}_1 + p_3 \mathbf{I}_2,$$

l'interpretazione geometrica della quale risulta dalla: $\nabla \ln v = \frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial \omega^3}$, quindi la grandezza di questo gradiente ci offre la curvatura delle linee di corrente, mentre la sua direzione è collineare alla loro normale principale. Dalle (23) risulta che $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, e dunque il fluido sottoposto a un moto quasi-rigido è in modo necessario incompressibile.

Osservazione: Tenendo conto delle (23) si deduce che $\mathbf{v} \times (\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \nabla v^2$, ciò significa che nei moti quasi-rigidi permanenti viene fuori in modo naturale una famiglia di superfici di Bernoulli sulle quali le linee di corrente sono geodetiche.

Per mettere in evidenza altre proprietà del moto quasi-rigido scegliamo il triedro in modo che $v_1 = 0$ e quindi $q_3 = 0$. Una prima condizione risulta dalla: $\nabla \ln v = p_3 \mathbf{I}_2$ e precisamente $p_1 + r_3 = 0$, ciò che conferma l'osservazione di sopra. Allora dalle condizioni di integrabilità (4) risulta ugualmente: $p_1^2 + r_1 p_3 = 0$; le conseguenze differenziali di questa ci danno subito: $p_1 r_2 p_3 = 0$.

Se $p_1 = 0$, si ricava $q_2 = r_i = 0$ (con $i = 1, 2, 3$). Poiché in più abbiamo $p_{3,3} = 0$, ne segue che le linee di corrente saranno cerchi concentrici nei piani paralleli.

Se $p_3 = 0$, allora la grandezza della velocità può dipendere soltanto dal tempo (cioè $\nabla v = 0$) e inoltre risulta $p_1 = 0$. In questo caso le linee di corrente formano un fascio di rette parallele. In entrambi i casi, il movimento è puramente rigido perciò li escluderemo.

Resta da studiare il caso $r_2 = 0$ nel quale avremo, riassumendo, le seguenti relazioni finite:

$$(24) \quad q_1 = p_2 = r_2 = q_3 = 0 \quad , \quad p_1 = q_2 = -r_3 \quad , \quad p_1^2 + r_1 p_3 = 0.$$

Usando le formole (8) si trovano: $i_6 = 0$, $i_5 = -p_3^2 p_1$ e dunque:

$$\rho = 0 \quad , \quad \alpha = -1 : p_1 \quad , \quad \varphi = \Psi.$$

Si ottiene che il campo della velocità ha come sostegno un complesso lineare di rette riferito al suo triedro canonico, mentre le normali principali delle linee di corrente hanno come sostegno il complesso lineare associato.

Allora risulta la seguente caratterizzazione: la condizione necessaria e sufficiente, affinché un campo di vettori sia campo della velocità di un moto quasi-rigido, è che questo campo sia ortogonale a un piano non olonomo ($q_1 = p_2 = p_1 - q_2 = 0$) e il gradiente della sua grandezza sia collineare con la normale principale delle linee vettoriali del campo.

Applicazione. Nel caso dei moti quasi-rigidi abbiamo:

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} = v (\dot{p}_3 \mathbf{I}_1 - \dot{p}_1 \mathbf{I}_3),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{rot}^2 \mathbf{v} = & -[v_2 (2 \dot{p}_1 + r_3) + v (\dot{p}_{1,2} + \dot{p}_1 \dot{p}_3)] \mathbf{I}_1 + \\ & + (v_{23} + \dot{p}_{1,1} v) \mathbf{I}_2 + (-v_{22} + v_2 r_1 + 2 \dot{p}_1^2 v) \mathbf{I}_3. \end{aligned}$$

Dalle (23) e (24) troviamo: $v_{23} = 0$, $v_{22} = v \dot{p}_1^2$; compiendo i calcoli, nei quali si tiene conto anche dalle condizioni di integrabilità (4), risulta:

$$\operatorname{rot}^2 \mathbf{v} = 0.$$

Questo vuol dire, che per i moti quasi-rigidi dei fluidi, l'equazione dinamica (10') avrà la stessa forma, tanto per i fluidi ideali quanto per quelli viscosi, ciò che ci dà la condizione di integrabilità: $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. Essa include la relazione finita: $\dot{p}_3 r_t + \dot{p}_1 \dot{p}_t = 0$.

L'esistenza del moto quasi-rigido non stazionario si riduce allo studio dell'involutività del seguente sistema noncontraddittorio:

$$\begin{aligned} (25) \quad p &= \dot{p}_1 \omega^1 + \dot{p}_3 \omega^3 + \dot{p}_t dt, \quad q = \dot{p}_1 \omega^2 + q_t dt, \\ r &= -(\dot{p}_1^2 : \dot{p}_3) \omega^1 - \dot{p}_1 \omega^3 - (\dot{p}_1 : \dot{p}_3) \dot{p}_t dt, \quad d(\ln v) = \dot{p}_3 \omega^2 + r_t dt \end{aligned}$$

i caratteri del quale sono: $s_0 = s_1 = 4$, $s_2 = 1$. Dunque il sistema (25) è in involuzione con le soluzioni regolari generiche dipendenti da una funzione a due argomenti,

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BELTRAMI E., *Considerazioni idrodinamiche*, « Rend. Ist. Lombardo », 22, 4, 300-309 (1889).
- [2] BUCHGUENCE S., *Sui moti elicoidali* (l. russa), « Nauc. zap. Mosc. hidromel. Inst. », 27, 73-90 (1948).
- [3] GHEORGHIEV GH., *Despre unele mișcări elicoidale ale fluidelor. Comunic.*, « Acad. R. P. Române », 12, 651-659 (1962).
- [4] LOIZIANSKI L., *La meccanica del fluido e del gas* (l. russa), Mosca 1950.
- [5] TRUESDELL C., *La velocità massima nel moto di Gromeka-Beltrami*, « Atti dei Lincei », 13, 8, 378-379 (1952).