Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sull'unicità della soluzione limitata di una diseguaglianza variazionale d'evoluzione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.4, p. 409–411.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_4_409_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Analisi matematica. — *Sull'unicità della soluzione limitata di una diseguaglianza variazionale d'evoluzione.* Nota di MARCO BIROLI, presentata (*) dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — We show a unicity theorem for parabolic evolution inequalities.

Consideriamo uno spazio di Banach reale V, sia V* il suo duale. Indichiamo con $\| \ \|$ la norma su V, con $\langle \, , \rangle$ la dualità fra V e V*, con $\| \ \|^*$ la norma duale su V*.

Sia H uno spazio di Hilbert identificato con il suo duale per il prodotto scalare $(\, ,)$ e sia $| \ |$ la norma definita su H dal prodotto scalare.

Sia $V \subset H \subset V^*$, V identificato con un sottospazio denso di H e l'iniezione di V in H sia compatta.

Sia **K** un insieme chiuso e convesso di V.

Consideriamo la diseguaglianza variazionale.

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t), v(t) - u(t)\rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t)\rangle - \langle f(t), v(t) - u(t)\rangle\} \, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ | v(t_2) - u(t_2) |^2 - | v(t_1) - u(t_1) |^2 \}$$

$$\forall v(t) \in \{ v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V) \; v'(t) \in \mathcal{L}^{p'}_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V^*) \; v(t) \in \mathbf{K} \text{ q.o.} \}$$

$$\forall v(t) \in \{ v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H) \; v(t) \in \mathbf{K} \text{ q.o.} \}$$

ove $A : V \to V^*$ e

a) A è limitato, monotono, emicontinuo

b) $\langle Av, v\rangle \geq \alpha \| v \|^p \qquad \alpha > 0, p \geq 2, \qquad \forall v \in V$

c) $\langle Aw - Av, w - v\rangle \geq \alpha \| w - v \|^p, \qquad \forall v, w \in V$

d) $\| Av \|^* \leq c \| v \|^{p-1} \qquad c > 0 \qquad \forall v \in V$

e $f(t) \in \mathcal{L}^{p'}_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V^*)$ (p' indice coniugato a p).

Si ottiene il seguente risultato.

TEOREMA I. *Supponiamo che la diseguaglianza d'evoluzione considerata ammetta una soluzione* $u(t)$ *limitata in* H *su tutto l'asse, essa è unica.*

Nella dimostrazione del Teorema I usiamo un metodo introdotto da Lions [1], per dimostrare l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per una diseguaglianza d'evoluzione analoga alla considerata.

Siano $u(t)$ e $u^*(t)$ due soluzioni limitate su tutto l'asse in H della diseguaglianza considerata.

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1970.

Poniamo

$$w(t) = \frac{u(t) + u^*(t)}{2} .$$

Fissiamo arbitrariamente t_1 e t_2.

Definiamo $w_\eta(t)$ mediante la relazione

$$[1,1] \qquad \begin{aligned} \eta\, w'_\eta(t) + w_\eta(t) &= w(t) \\ w_\eta(t_1) &= w(t_1) . \end{aligned}$$

Si ha, [1],

$$[1,2] \qquad \begin{aligned} &\lim_{\eta\to 0}{}^{*} w_\eta = w \qquad \text{in } \mathfrak{L}^p(t_1, t_2 ; \mathrm{V}) \\ &\lim_{\eta\to 0} w_\eta(t) = w(t) \quad \text{uniformemente su } (t_1, t_2) \text{ in H.} \end{aligned}$$

Poniamo nella nostra diseguaglianza d'evoluzione $v(t) = w_\eta(t)$.

Si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - u(t)\rangle + \langle \mathrm{A}u(t), w_\eta(t) - u(t)\rangle - \langle f(t), w_\eta(t) - u(t)\rangle\}\, \mathrm{d}t \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\{|w_\eta(t_2) - u(t_2)|^2 - |w_\eta(t_1) - u(t_1)|^2\}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle w'_\eta, w_\eta(t) - u^*(t)\rangle + \langle \mathrm{A}u^*(t), w_\eta(t) - u^*(t)\rangle - \langle f(t), w_\eta(t) - u^*(t)\rangle\}\, \mathrm{d}t \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\{|w_\eta(t_2) - u^*(t_2)|^2 - |w_\eta(t_1) - u^*(t_1)|^2\}$$

da cui

$$[1,3] \qquad \begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \{2\langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - w(t)\rangle + \langle \mathrm{A}u(t), w_\eta(t) - u(t)\rangle + \\ &+ \langle \mathrm{A}u^*(t), w_\eta(t) - u^*(t)\rangle - 2\langle f(t), w_\eta(t) - w(t)\rangle\}\, \mathrm{d}t \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\{[|w_\eta(t_2) - u(t_2)|^2 + |w_\eta(t_2) - u^*(t_2)|^2] - \\ &- [|w_\eta(t_1) - u(t_1)|^2 + |w_\eta(t_1) - u^*(t_1)|^2] . \end{aligned}$$

Osserviamo ora che da [1,1] si ha

$$[1,4] \qquad \max\lim_{\eta\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - w(t)\rangle\, \mathrm{d}t \leq 0 .$$

Da [1,2] [1,3] e [1,4] segue

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle \mathrm{A}u(t), w(t) - u(t)\rangle + \langle \mathrm{A}u^*(t), w(t) - u^*(t)\rangle\}\, \mathrm{d}t \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\{[|w(t_2) - u(t_2)|^2 + |w(t_2) - u^*(t_2)|^2] -$$

$$- [|w(t_1) - u(t_1)|^2 + |w(t_1) - u^*(t_1)|^2]$$

ossia

[1,5]
$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\langle Au(t)-Au^*(t), u(t)-u^*(t)\rangle\, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}\{|u(t_2)-u^*(t_2)|^2-|u(t_1)-u^*(t_1)|^2\}.$$

Da [1,5] si deduce che la funzione $|u(t)-u^*(t)|$ è decrescente.

Per dimostrare la tesi basterà allora dimostrare che $\forall\, \varepsilon > 0, a \in \mathbf{R}$ esiste $\bar{t} \leq a$ tale che

$$|u(\bar{t})-u^*(\bar{t})| \leq \varepsilon .$$

Procediamo per assurdo.

Supponiamo che

$$|u(t)-u^*(t)| > \varepsilon \qquad \forall\, t \leq a .$$

Da [1,5] si ha

$$-\frac{\alpha}{2}\gamma^p\int_{t_1}^{t_2}|u(t)-u^*(t)|^p\, dt \geq \frac{1}{4}\{|u(t_2)-u^*(t_2)|^2-|u(t_1)-u^*(t_1)|^2\}.$$

Poniamo $t_2 = a$ si ottiene

$$-\frac{\alpha}{2}\gamma^p\varepsilon^p(a-t_1) \geq \frac{1}{4}\{|u(a)-u^*(a)|^2-|u(t_1)-u^*(t_1)|^2\}$$

ossia

$$|u(t_1)-u^*(t_1)|^2 \geq 2\,\alpha\gamma^p\varepsilon^p(a-t_1).$$

Facendo allora tendere t_1 a $-\infty$ e ricordando che $u(t)$ e $u^*(t)$ sono limitate in H su tutto l'asse, si cade nell'assurdo.

La tesi rimane così provata.

BIBLIOGRAFIA.

[1] LIONS J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod. - Gauthier - Villars. Coll. études mathematiques, 1969.