Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franco Bocchio

Su alcune applicazioni di interesse geodetico delle connessioni non simmetriche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.3, p. 343–351.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_3_343_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Geodesia. — *Su alcune applicazioni di interesse geodetico delle connessioni non simmetriche.* Nota di Franco Bocchio presentata (*) dal Socio A. Marussi.

Summary. — A parallel displacement is determined by means of non-symmetric connections which preserve the " orientation " of geometric quantities of geodetic interest on surfaces or in space.

1. Nella presente Nota si fa vedere come nell'interpretazione di un particolare tipo di trasporto per parallelismo su di una superficie e nello spazio si introducano, in luogo dei simboli di Christoffel di seconda specie, dei coefficienti di connessione non simmetrici.

Si è dapprima considerato un trasporto per parallelismo che conservi, nel senso che si dirà l'« orientamento » di un vettore superficiale a un polo prefissato di una superficie; la connessione che ne risulta si è detta per questo a *conservazione dell'orientamento*. Di questo problema, sostanzialmente messo in rilievo da Hessenberg [9] già nel 1924 e poi ripreso da Schouten [1], viene qui svolto un esame dettagliato, e ciò non solo per il suo interesse intrinseco, ma soprattutto per rendere più spedita la trattazione della seconda parte, che ha riguardo ad un trasporto per parallelismo nello spazio ordinario che conservi l'orientamento di una coppia di vettori rispetto ad un punto e ad un'asse prefissato dello spazio. Anche in questo caso, che è una generalizzazione del precedente, si parlerà di connessione a conservazione dell'orientamento o di *connessione centrale*.

2. Su di una superficie regolare Σ su cui si sia introdotto un sistema (u^1, u^2) di coordinate parametriche e un tensore metrico fondamentale g_{ij} si consideri un « polo » P_0; un vettore in P si dirà « orientato » al polo se esso è tangente in P alla geodetica che unisce P con P_0.

Siano $\mathcal{G}$ e $\mathcal{T}$, rispettivamente, la famiglia delle geodetiche che irradiano dal polo e la famiglia delle loro traiettorie ortogonali.

Partendo da P un osservatore esegua uno spostamento $\underset{1}{ds}$ lungo la geodetica di $\mathcal{G}$ per P e uno spostamento $\underset{2}{ds}$ lungo la traiettoria ortogonale per P; sia P_{12} il punto così raggiunto. Se con P_{21} si indica il punto raggiunto dall'osservatore dopo aver effettuato lo spostamento $\underset{2}{ds}$ nella direzione della traiettoria ortogonale alla geodetica precedente e quindi lo spostamento $\underset{1}{ds}$ lungo una geodetica per il polo, si individua un vettore

$$\Delta^i = P_{21} - P_{12}. \tag{2.1}$$

(*) Nella seduta del 14 marzo 1970.

Detti $\underset{1}{\mathrm{d}u^i}$ e $\underset{2}{\mathrm{d}u^i}$ i vettori infinitesimi che corrispondono agli spostamenti $\underset{1}{\mathrm{d}s}$ e $\underset{2}{\mathrm{d}s}$, se si impone al trasporto per parallelismo dell'uno sull'altro secondo le rispettive linee di trasporto di essere tale che resti invariato l'angolo compreso tra il vettore trasportato e la direzione col polo, gli estremi dei vettori infinitesimi così ottenuti individueranno ancora, a condizione, si intende, che nel trasporto il modulo dei vettori resti invariato, il vettore Δ^i. In relazione alla connessione cercata, che indicheremo con Γ^i_{jk}, esso è dato dalla

$$\Delta^i = \Gamma^i_{jk}\,\underset{1}{\mathrm{d}u^j}\,\underset{2}{\mathrm{d}u^k} - \Gamma^i_{jk}\,\underset{2}{\mathrm{d}u^j}\,\underset{1}{\mathrm{d}u^k}. \tag{2.2}$$

Scomposti i coefficienti della connessione nelle parti simmetrica S^i_{jk} ed antisimmetrica A^i_{jk}, cioè

$$\Gamma^i_{jk} = S^i_{jk} + A^i_{jk}$$

la (2.2) può scriversi [4]:

$$\Delta^i = 2\,A^i_{jk}\,\underset{1}{\mathrm{d}u^j}\,\underset{2}{\mathrm{d}u^k}. \tag{2.3}$$

La quantità A^i_{jk} costituisce un tensore, detto di *asimmetria* o di *torsione*; le sue componenti si ottengono confrontando la (2.3) con la (2.1).

Una connessione con torsione si dice *semi–simmetrica* [2], quando esista un vettore A_i tale che possa scriversi

$$A^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(A_j\,\delta^i_k - A_k\,\delta^i_j\right) = A_{[j}\,\delta^i_{k]} \tag{2.4}$$

essendo δ^i_j il simbolo di Kronecker. In tal caso si ha

$$\Delta^i = 2\,A_j\left(\underset{1}{\mathrm{d}u^j}\,\underset{2}{\mathrm{d}u^i} - \underset{1}{\mathrm{d}u^i}\,\underset{2}{\mathrm{d}u^j}\right) = 2\,A_j\,\underset{1}{\mathrm{d}u^{[j}}\,\underset{2}{\mathrm{d}u^{i]}}. \tag{2.5}$$

Se si impone ora alla connessione cercata di essere *metrica* [3] rispetto al tensore fondamentale g_{ij}, cioè tale che

$$g_{ij/k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^h_{ik}\,g_{hj} - \Gamma^l_{jk}\,g_{li} = 0 \tag{2.6}$$

ne risulta la commutabilità delle operazioni di derivazione covariante e di innalzamento e abbassamento degli indici. Se si introducono le notazioni

$$\left\{\begin{aligned} \chi_{ijk} &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \\ A_{ijk} &= g_{il}\,A^l_{jk} \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

e si conviene che [3]:

$$\Psi_{\{ijk\}} = \Psi_{ijk} - \Psi_{jki} + \Psi_{kij}$$

la connessione cercata risulta pienamente determinata dalla relazione

$$\Gamma^i_{jk} = g^{il}(\chi_{\{jlk\}} - A_{\{jlk\}}) = \left\{ {i \atop jk} \right\} - g^{il} A_{\{jlk\}} . \tag{2.8}$$

Risulteranno essere geodetiche [5] nella connessione così determinata tutte le linee di Σ che formino un angolo costante con le geodetiche che irraggiano dal polo, e cioè le *lossodromiche* della superficie. In particolare saranno geodetiche nella connessione le geodetiche per il polo e le loro traiettorie ortogonali.

Per un teorema [6] il quale afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio non riemanniano n–dimensionale ammetta n–campi linearmente indipendenti di vettori paralleli è che il *tensore di curvatura* relativo alla connessione sia nullo, cioè,

$$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^h_{jl}\Gamma^i_{hk} - \Gamma^h_{jk}\Gamma^i_{hl} = 0 \tag{2.9}$$

ne viene che, in questo caso, la superficie Σ appare « piatta » rispetto alla connessione introdotta.

3. Si applicano ora i risultati trovati al caso di una sfera di raggio R riferita alle coordinate geografiche (φ , λ) con tensore fondamentale

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} . \tag{3.1}$$

Il vettore $P_{21} - P_{12}$ risulta in tal caso

$$\Delta^i \equiv (0 , - \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi \, d\lambda) \tag{3.2}$$

mentre per le componenti del tensore di torsione si ha

$$A^1_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^2_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

da cui si ricavano immediatamente le altre componenti. Si verifica inoltre che la connessione è semisimmetrica con

$$A_i \equiv (- \operatorname{tg} \varphi , 0) .$$

I coefficienti χ_{ijk} e A_{ijk} non nulli sono

$$\begin{cases} \chi_{122} = - R^2 \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \\ A_{212} = \dfrac{R^2}{2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \\ A_{122} = - \dfrac{R^2}{2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \end{cases} \tag{3.4}$$

e quindi, dalla (2.8) si ottiene facilmente

$$\Gamma^1_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Gamma^2_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{tg}\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

la cui parte simmetrica risulta perciò

$$S^1_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad S^2_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \\ -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

che, si noti, non coincide con i simboli di Christoffel di seconda specie relativi alla metrica (3.1)

$$\left\{ {1 \atop jk} \right\} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad \left\{ {2 \atop jk} \right\} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{tg}\varphi \\ -\operatorname{tg}\varphi & 0 \end{pmatrix} .$$

Si verifica poi che, essendo il versore che forma l'angolo α coi meridiani dato da

$$\mu^i \equiv \left(\frac{\cos\alpha}{R} , \frac{\operatorname{sen}\alpha}{R\cos\varphi} \right) \tag{3.7}$$

per una lossodromica della sfera è

$$\frac{\delta\mu^i}{\delta s} = \frac{d\mu^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}\,\mu^j\,\mu^k = 0 \tag{3.8}$$

e cioè le lossodromiche sono geodetiche nella connessione (3.5). In particolare sono perciò geodetiche nella connessione, come è implicito nelle premesse, i meridiani e i paralleli.

Si vede altresì che la connessione (3.5) verifica la (2.9). In sostanza, un osservatore che ignori la sfericità della superficie si comporta come se si trovasse su di un piano sul quale sia tracciata una rete di Mercatore. In effetti, su tale piano, le trasformate dei paralleli, dei meridiani e delle lossodromiche della sfera sono linee geodetiche.

4. Si estendono ora le considerazioni precedenti al caso dello spazio ordinario S_3 in cui si sia introdotto un sistema di coordinate con tensore metrico fondamentale g_{ij} e si considerino in esso un polo, o centro, O, e un asse polare per O, che serviranno anche nel seguito di base per il sistema di coordinate polari sferiche. In un punto generico P si considerino poi i vettori $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ definiti come segue:

$\bar{C}$ appartenga alla retta per O e P, $\bar{B}$ sia ortogonale a $\bar{C}$ e stia nel piano per P ortogonale all'asse polare, $\bar{A}$ sia ortogonale al piano definito da $\bar{B}$ e $\bar{C}$. Quel che si vuole trovare è una connessione tale che nel trasporto per parallelismo da P a un punto P* i «trasportati» dei vettori assegnati possano ancora definirsi, in relazione al punto P*, nel modo sopra indicato e si conservi altresì il modulo dei vettori trasportati.

In un sistema di coordinate polari sferiche (φ, λ, ρ), il tensore metrico fondamentale è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si considerino i vettori infinitesimi definiti dalla

$$\left\{ \begin{aligned} \underset{1}{du^i} &\equiv (d\varphi, 0, 0) \\ \underset{2}{du^i} &\equiv (0, d\lambda, 0) \\ \underset{3}{du^i} &\equiv (0, 0, d\rho) \end{aligned} \right. \tag{4.1}$$

Assunte ora come particolari linee di trasporto le linee φ, λ, ρ si considerino i vettori di chiusura $\underset{1}{\Delta^i}, \underset{2}{\Delta^i}, \underset{3}{\Delta^i}$, dei pentagoni [4] che si ottengono sulle superficie coordinate $\varphi = \text{cost}$, $\lambda = \text{cost}$, $\rho = \text{cost}$ trasportando, nel modo sopra definito e in analogia con il procedimento seguito per la sfera, i vettori delle coppie $(\underset{2}{du^i}, \underset{3}{du^i})$, $(\underset{1}{du^i}, \underset{3}{du^i})$, $(\underset{1}{du^i}, \underset{2}{du^i})$.

Si vede che tali vettori di chiusura sono dati dalla

$$\left\{ \begin{aligned} \underset{1}{\Delta^i} &\equiv \left(0, \frac{1}{\rho} d\lambda\, d\varphi, 0\right) \\ \underset{2}{\Delta^i} &\equiv \left(\frac{1}{\rho} d\varphi\, d\rho, 0, 0\right) \\ \underset{3}{\Delta^i} &\equiv (0, \operatorname{tg} \varphi\, d\varphi\, d\lambda, 0) \end{aligned} \right. \tag{4.2}$$

in cui è

$$\left\{ \begin{aligned} \underset{1}{\Delta^i} &\equiv P_{32} - P_{23} \\ \underset{2}{\Delta^i} &\equiv P_{31} - P_{13} \\ \underset{3}{\Delta^i} &\equiv P_{21} - P_{12} \end{aligned} \right.$$

ove $P_{\alpha\beta}$ indica il punto in cui viene a trovarsi l'estremità del vettore $\underset{\alpha}{du^i}$ quando venga trasportato per parallelismo nel modo sopra definito sul vettore $\underset{\beta}{du^i}$. I vettori di chiusura (4.2) possono calcolarsi anche attraverso i coefficienti di rotazione di Ricci

$$\gamma_{\alpha\beta\delta} = \underset{\alpha}{\lambda_{i/j}} \underset{\beta}{\lambda^i} \underset{\delta}{\lambda^j}; \qquad \begin{aligned} \alpha, \beta, \delta &= 1, 2, 3 \\ i, j &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ove la barra indica ora derivazione covariante rispetto ai simboli di Christoffel relativi alla metrica adottata:

$$\left\{ {1 \atop jk} \right\} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \left\{ {2 \atop jk} \right\} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{tg}\varphi & 0 \\ -\operatorname{tg}\varphi & 0 & 1/\rho \\ 0 & 1/\rho & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ {3 \atop jk} \right\} \equiv \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & -\rho^2\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che i $\underset{\alpha}{\lambda}_{i/j}$ $(\alpha = 1, 2, 3; i, j = 1, 2, 3)$ diversi da zero sono

$$\underset{1}{\lambda}_{2/2} = -\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \,, \qquad \underset{1}{\lambda}_{3/1} = -1$$

$$\underset{2}{\lambda}_{1/2} = \rho \operatorname{sen}\varphi \qquad , \qquad \underset{2}{\lambda}_{3/2} = -\cos\varphi$$

$$\underset{3}{\lambda}_{1/1} = \rho \qquad , \qquad \underset{3}{\lambda}_{2/2} = \rho\cos^2\varphi .$$

I coefficienti di rotazione diversi da zero risultano essere pertanto

$$\gamma_{122} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\rho} \,, \qquad \gamma_{212} = -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\rho}$$

$$\gamma_{322} = \frac{1}{\rho} \quad , \qquad \gamma_{232} = -\frac{1}{\rho}$$

$$\gamma_{311} = \frac{1}{\rho} \quad , \qquad \gamma_{131} = -\frac{1}{\rho}$$

e risultano così soddisfatte le identità [12]:

$$\gamma_{\alpha\alpha\beta} = 0$$

$$\gamma_{\alpha\beta\delta} + \gamma_{\beta\alpha\delta} = 0$$

ed è altresì verificata [13] la

$$\chi_\beta^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \gamma_{\alpha\beta\beta}^2$$

che fornisce la prima curvatura della congruenza di indice β.

Considerato ora il significato geometrico dei coefficienti di rotazione nello spazio euclideo [13], si vede che i moduli dei vettori $\underset{1}{\Delta}^i, \underset{2}{\Delta}^i, \underset{3}{\Delta}^i$ possono anche calcolarsi per mezzo delle

$$|\underset{1}{\Delta}^i| = d\theta_1 \, |\underset{3}{du^i}| = \gamma_{322} \, \underset{2}{ds} \, |\underset{3}{du^i}|$$

$$|\underset{2}{\Delta}^i| = d\theta_2 \, |\underset{3}{du^i}| = \gamma_{311} \, \underset{1}{ds} \, |\underset{3}{du^i}|$$

$$|\underset{3}{\Delta}^i| = d\theta_3 \, |\underset{1}{du^i}| = \gamma_{122} \, \underset{1}{ds} \, |\underset{1}{du^i}|$$

dove $d\theta_1$ è l'angolo del quale è ruotato il vettore nello spostamento lungo un arco $\underset{2}{ds}$ di parallelo, $d\theta_2$ l'angolo del quale è ruotato $\underset{3}{du^i}$ nello spostamento lungo un arco $\underset{1}{ds}$ di meridiano e $d\theta_3$ l'angolo di cui è ruotato $\underset{1}{du^i}$ nello spostamento lungo un arco $\underset{1}{ds}$ di parallelo. Si ricava subito

$$|\underset{1}{\Delta^i}| = \cos\varphi \, d\lambda \, d\rho$$

$$|\underset{2}{\Delta^i}| = d\varphi \, d\rho$$

$$|\underset{3}{\Delta^i}| = \rho \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\lambda$$

dalle quali si ottengono subito le componenti (4.2) già ottenute per altra via.

Si osservi che i coefficienti di rotazione del tipo

$$\gamma_{\alpha\beta\beta}; \qquad (\alpha = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta)$$

rappresentano la curvatura geodetica delle linee coordinate β rispetto alle superfici coordinate caratterizzate dall'indice $\gamma \neq \alpha, \beta$. Questa proprietà è legata al significato geometrico già considerato delle somme $\sum_{\alpha=1}^{3} \gamma^2_{\alpha\beta\beta}$ ed al fatto che le superfici coordinate si tagliano ortogonalmente e che pertanto la prima curvatura χ della loro intersezione può scriversi

$$\chi^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

dove σ_1 e σ_2 sono le curvature geodetiche dell'intersezione rispetto alle rispettive superfici coordinate.

Con procedimento analogo a quello già seguito per la sfera dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} \underset{1}{\Delta^i} &= 2\, A^i_{jk}\, \underset{2}{du^j}\, \underset{3}{du^k} \\ \underset{2}{\Delta^i} &= 2\, A^i_{jk}\, \underset{1}{du^j}\, \underset{3}{du^k} \\ \underset{3}{\Delta^i} &= 2\, A^i_{jk}\, \underset{1}{du^j}\, \underset{2}{du^k} \end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

si ricava, tenuto conto delle (4.1), (4.2), il tensore di torsione

$$A^1_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & 0 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & 0 & \frac{1}{2\rho} \\ 0 & -\frac{1}{2\rho} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3_{jk} \equiv 0. \tag{4.4}$$

Si verifica facilmente che, pur di assumere

$$A^i \equiv \left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi, 0, -\frac{1}{\rho}\right) \tag{4.5}$$

la (2.4) risulta soddisfatta e la connessione in esame è pertanto *semisimmetrica*.

Il significato geometrico [4] del vettore A_i può ricavarsi dalla (2.5). Se i vettori infinitesimi $d\underset{\alpha}{u^i}$ e $d\underset{\beta}{u^j}$ soggetti al trasporto fossero ortogonali ad A_i è evidente che il vettore di chiusura Δ_i sarebbe nullo. Sono perciò possibili, anche nell'ambito della connessione in esame, quadrilateri infinitesimi; la loro giacitura è quella individuata dal vettore A_i.

Dalla (2.8) possono ora ricavarsi i coefficienti Γ^i_{jk} cercati,

$$\Gamma^1_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma^2_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{tg}\varphi & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma^3_{jk} \equiv 0 . \tag{4.6}$$

La parte simmetrica è

$$S^1_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S^2_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & 0 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi & 0 & \frac{1}{2\rho} \\ 0 & \frac{1}{2\rho} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^3_{jk} \equiv 0 . \tag{4.7}$$

Si rileva anche qui che S^i_{jk} non coincide con i simboli di Christoffel relativi alla metrica introdotta. In relazione alla connessione così determinata è facile verificare che le linee φ, λ, ρ, sono linee autoparallele e cioè geodetiche della connessione introdotta. Si verifica infatti facilmente che è

$$\frac{d\underset{\alpha}{\lambda_i}}{ds} + \Gamma^i_{jk} \underset{\alpha}{\lambda^j} \underset{\alpha}{\lambda^k} = 0 ; \qquad \alpha = 1, 2, 3 . \tag{4.8}$$

È altresì facile verificare che sono geodetiche nella connessione le linee lossodromiche delle superfici coordinate, cioè che è

$$\frac{d\underset{\alpha}{l^i}}{ds} + \Gamma^i_{jk} \underset{\alpha}{l^j} \underset{\alpha}{l^k} = 0 , \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{4.9}$$

essendo

$$\begin{cases} \underset{1}{l^i} \equiv \left(0 , \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho\cos\varphi} , \cos\alpha\right) \\ \underset{2}{l^i} \equiv \left(\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\rho} , 0 , \cos\beta\right) \\ \underset{3}{l^i} \equiv \left(\dfrac{\cos\gamma}{\rho} , \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\rho\cos\varphi} , 0\right) . \end{cases}$$

Si verifica infine che sono geodetiche nella connessione le linee tali che i coseni direttori a, b, c, del loro versore tangente $\mathcal{T}^i$ rispetto alla congruenza $\underset{\alpha}{\lambda^i}$ restino invariati.

Posto

$$\mathcal{T}^i = a\underset{1}{\lambda^i} + b\underset{2}{\lambda^i} + c\underset{3}{\lambda^i} \tag{4.10}$$

si vede infatti che è

$$\frac{d\mathcal{T}^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}\,\mathcal{T}^j\,\mathcal{T}^k = 0\,. \tag{4.11}$$

5. È interessante osservare che quando si considerino i coefficienti di rotazione di Ricci per la connessione [7] in esame

$$\gamma_{\alpha\beta\delta} = \underset{\alpha}{\lambda}_{i/j}\,\underset{\beta}{\lambda^i}\,\underset{\delta}{\lambda^j}\,; \qquad \begin{array}{l} \alpha\,,\beta\,,\delta = 1\,,2\,,3 \\ i\,,j = 1\,,2\,,3 \end{array} \tag{5.1}$$

ove la barra rappresenta ora derivazione covariante rispetto alla connessione Γ^i_{jk} si verifica facilmente che i coefficienti di rotazione *sono tutti nulli*. Ciò significa che, rispetto alla connessione trovata, la terna principale [10] associata al sistema di coordinate $(\varphi\,,\lambda\,,\rho)$ introdotto non è soggetta a «rotazioni». In particolare, risulta verificato il teorema [8] che afferma essere

$$\gamma_{\alpha\beta\beta} = 0\,; \qquad \alpha = 1\,,2\,,3\,;\ \beta \neq \alpha \tag{5.2}$$

condizione necessaria e sufficiente affinché le linee della congruenza $\underset{\beta}{\lambda^i}$ siano geodetiche nella connessione. Si osserva che questo teorema generalizza una analoga proprietà dei coefficienti di Ricci negli spazi di Riemann [11].

BIBLIOGRAFIA.

[1] SCHOUTEN J. A., *Ricci Calculus*, Springer Verlag, 1954, p. 143.
[2] *Loc. cit.*, p. 126.
[3] *Loc. cit.*, p. 132.
[4] *Loc. cit.*, p. 127.
[5] *Loc. cit.*, p. 155.
[6] EISENHART L. P., *Non Riemannian Geometry*. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. VIII, 1927, p. 19.
[7] *Loc. cit.*, p. 47.
[8] *Loc. cit.*, p. 51.
[9] HESSENBERG G., *Beispiele zur Richtungsübertragung*, Angelegenheiten der Deutschen Matematiker Vereinigung, Sept. 1924.
[10] MARUSSI A., *Les principes de la Géodésie Intrinsèque*, « Bull. Géod. », n. 19 (1951).
[11] EISENHART L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1949, p. 100.
[12] *Loc. cit.*, p. 99.
[13] WEATHERBURN C. E., *Riemannian Geometry*, Cambridge University Press, 1963, p. 100.