
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

**Sulla propagazione di onde piane in un plasma
soggetto a un campo magnetico**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 48 (1970), n.3, p. 334–342.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_3_334_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Plasmadinamica. — *Sulla propagazione di onde piane in un plasma soggetto a un campo magnetico.* Nota (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we consider plane wave propagation in an indefinite plasma, which initially is in a homogenous condition and at rest, subjected to a uniform magnetic field, in the case where the effect of collisions between ions and electrons is neglected, and the reaction of the electrons is equivalent to a pressure which depends on the variation of the electronic density.

1. In questa Nota si considera la propagazione di onde piane in un plasma indefinito, inizialmente allo stato omogeneo e in quiete, soggetto a un campo magnetico uniforme, nel caso in cui gli ioni si possano ritenere fermi, che sia trascurabile l'effetto degli urti elettrone-ione, e che l'azione degli elettroni, in agitazione termica, sia equivalente ad una pressione dipendente dalla variazione di densità elettronica.

Questo problema, nel caso di onde dipendenti da una sola coordinata spaziale, è stato studiato da diversi autori, sia in assenza come in presenza di un campo magnetico esterno [1], [2]. Ultimamente, sotto le stesse condizioni, il dott. M. Fabrizio [3], in una interessante Memoria, ha studiato i casi di separazione di onde elettromagnetiche trasversali e longitudinali, considerando in particolare la propagazione detta quasi longitudinale, che avviene cioè in direzione poco diversa da quella del campo magnetico esterno.

In questa Nota ho voluto esaminare il caso generale della propagazione di onde piane nelle tre coordinate spaziali. Un primo risultato che ho messo in evidenza è che il problema generale del moto si può ridurre alla considerazione di un'equazione differenziale vettoriale in cui è incognita la sola velocità media elettronica. Così pure un'analoga equazione vettoriale ho ottenuto per il campo elettrico.

Dall'equazione vettoriale del moto ho dedotto che la componente assiale della velocità elettronica, cioè secondo la direzione del campo magnetico esterno, la componente della vorticità secondo la stessa direzione, la divergenza del vettore velocità, e quindi anche la variazione di densità elettronica, verificano una stessa equazione differenziale, spazio-temporale, dell'ottavo ordine.

Passando quindi a considerare la propagazione di onde piane ho ottenuto, per il quadrato della pulsazione, un'equazione di quarto grado, i cui coefficienti, dipendenti dalle costanti del problema e dai numeri d'onda, sono alternativamente positivi e negativi. Ne segue che se le radici di questa equazione sono tutte reali, si hanno quattro modi possibili di propagazione.

(*) Presentata nella seduta del 14 marzo 1970.

Successivamente mi sono domandato se nel plasma nelle condizioni considerate, sia possibile la propagazione di onde trasversali, di onde cioè in cui la velocità delle particelle elettroniche è perpendicolare alla direzione di propagazione. L'analisi fatta dimostra che se la componente assiale della velocità si suppone diversa da zero, non è possibile la propagazione di tali onde. Ma se tale componente è nulla, se cioè il moto ondoso avviene in piani orizzontali (perpendicolari al campo magnetico esterno), si hanno due tipi di onde che si possono chiamare pseudotrasversali, in quanto vanno attenuandosi colla distanza, con legge esponenziale, in una direzione orizzontale.

Considerando poi la possibilità di onde longitudinali, tali cioè che la velocità delle particelle sia parallela alla direzione di propagazione, ho ottenuto dei tipi di onde estremamente semplici, che possono propagarsi in una direzione qualsiasi, con velocità di fase uguale alla velocità della luce nel vuoto.

Infine ho considerato il caso generale in cui il moto ondoso avviene in piani perpendicolari al campo magnetico esterno ed ho trovato dei tipi di onde molto interessanti, in cui la pulsazione è proporzionale all'intensità del campo magnetico applicato. Quando questa intensità è sufficientemente grande esse possono propagarsi indefinitamente in una direzione qualsiasi. Ma quando l'intensità del campo magnetico applicato è sufficientemente debole, possono aversi onde che si propagano parallelamente al piano orizzontale e vanno attenuandosi, con legge esponenziale, colla profondità. Si hanno cioè onde che possono chiamarsi superficiali, la cui considerazione può essere utile in Astrofisica nel caso in cui una regione superficiale di un astro sia assimilabile a un plasma che riempie un semispazio e sia soggetto a un campo magnetico perpendicolare alla superficie.

2. Le equazioni che reggono il fenomeno del moto in un campo elettromagnetico degli elettroni di un gas completamente ionizzato, inizialmente allo stato omogeneo e in quiete, soggetto a una induzione magnetica uniforme B_0 , nell'ipotesi che gli ioni siano uniformemente distribuiti e fermi, che sia trascurabile l'effetto degli urti elettrone-ione, e che l'azione degli elettroni, in agitazione termica, sia equivalente a una pressione isotropica, dipendente dalla variazione di densità elettronica, sono:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & (4) \quad \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} + en_1 &= 0, \\
 (2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} + en_0 \mathbf{V} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & (5) \quad \operatorname{div} (n_0 \mathbf{V}) + \frac{\partial n_1}{\partial t} &= 0, \\
 (3) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & (6) \quad mn_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + n_0 e \mathbf{E} + m v_0^2 \operatorname{grad} n_1 + \\
 & & & + en_0 \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_0 = 0,
 \end{aligned}$$

dove i vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ rappresentano rispettivamente il campo elettrico e il campo magnetico indotti, $\mathbf{V}$ è la velocità media degli elettroni, n_0 la loro densità media in condizioni di quiete, n_1 la variazione di densità elettronica,

— e la carica ed m la massa di un elettrone, v_0 è una velocità connessa con l'agitazione termica degli elettroni, infine ε_0 e μ_0 sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica nel vuoto.

È opportuno osservare che l'equazione (3) è conseguenza della (1), e che la (4) è conseguenza della (2) e della (5).

Con riferimento ad una terna di assi cartesiani ortogonali (xyz), con l'asse z nella direzione e nel verso del campo magnetico applicato $\mathbf{B}_0$, il cui versore indicheremo con $\mathbf{k}$, siano u, v, w le componenti del vettore velocità $\mathbf{V}$, e indichiamo inoltre con $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ la componente di $\text{rot } \mathbf{V}$ secondo l'asse z .

Facciamo vedere intanto come si può ottenere un'equazione differenziale vettoriale in cui è incognita la sola velocità $\mathbf{V}$.

Infatti dalle equazioni (1) e (2) si deduce

$$(7) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \text{rot rot} \right) \mathbf{E} = en_0 \mu_0 c^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t},$$

dove $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$, è il quadrato della velocità della luce nel vuoto. Applicando allora ad ambo i membri della (6) l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \text{rot rot}$, e avendo riguardo alla (5), si ottiene l'equazione

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}^2}{\partial t^2} + (c^2 - v_0^2) \text{grad div } \mathbf{V} - c^2 \Delta_2 \mathbf{V} + v_0^2 c^2 \mathbf{V} \right\} + \\ + b_0 \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} \wedge \mathbf{k} + c^2 \left(\frac{\partial \text{rot } \mathbf{V}}{\partial z} - \text{grad div } \mathbf{V} \wedge \mathbf{k} \right) \right\} = 0,$$

che contiene come incognita la sola velocità $\mathbf{V}$, e dove si è posto

$$(9) \quad v_0^2 = \frac{n_0 e^2 \mu_0}{m}, \quad b_0 = \frac{e B_0}{m},$$

mentre Δ_2 è l'operatore di Laplace.

Può essere utile mostrare che anche per il campo elettrico $\mathbf{E}$ sussiste un'equazione differenziale vettoriale analoga alla (8), sebbene alquanto differente. Invero, derivando rispetto a t l'equazione (6) del moto, in virtù della (4) e della (7), si ricava facilmente

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) \mathbf{E} + (c^2 - v_0^2) \text{grad div } \mathbf{E} + \\ + b_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \text{rot rot} \right) \mathbf{E} \wedge \mathbf{k} = 0.$$

3. Vogliamo mostrare ora come la componente w della velocità, la componente ζ della vorticità e la $\text{div } \mathbf{V}$ soddisfano una stessa equazione differenziale. Per questo osserviamo che proiettando la (8) sull'asse z si ottiene l'equazione

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right\} w + (c^2 - v_0^2) \frac{\partial \text{div } \mathbf{V}}{\partial z \partial t} + b_0 c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

D'altra parte, prendendo la divergenza di ambo i membri dell'equazione (6) del moto, e derivando rispetto a t , in virtù delle (4) e (5) si ricava

$$(12) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_0^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) \operatorname{div} \mathbf{V} + b_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$

Dalla (8), prendendo il rotore di ambo i membri, e considerando quindi la componente secondo l'asse z , si ha l'altra equazione

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) \zeta + b_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) w - \\ - b_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Le equazioni (11), (12) e (13), costituiscono un sistema in cui sono incognite w , ζ e $\operatorname{div} \mathbf{V}$.

Eliminando ζ dalle (11) e (13), per mezzo della (12), si hanno le due equazioni

$$(14) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) w - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ v_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) + v_0^2 c^4 \right\} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

$$(15) \quad \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_0^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) + b_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) \right\} \operatorname{div} \mathbf{V} - \\ - b_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) w = 0.$$

Applicando ad ambo i membri della (15) l'operatore differenziale $\frac{\partial}{\partial z} \left\{ v_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) + v_0^2 c^4 \right\}$, oppure l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right)$, e avendo riguardo alla (14), si ricava subito che w e $\operatorname{div} \mathbf{V}$ soddisfano l'equazione differenziale

$$(16) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_0^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + b_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) \right] - b_0^2 v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 \frac{c^4}{v_0^2} \right) \right\} w = 0.$$

Analogamente, eliminando la w fra le equazioni (11) e (13), si ottiene

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right)^2 - b_0^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) \right\} \zeta - \\ - b_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \right) \left\{ (c^2 - v_0^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2 \right) \right\} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Applicando ad ambo i membri di questa l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_0^2 \Delta_2 + v_0^2 c^2$, e tenendo conto della (12) si ha che anche la componente ζ della vorticità soddisfa l'equazione (17).

È ovvio che, avendo riguardo alla (5), anche la variazione di densità elettronica n_1 verifica l'equazione (16).

Osserviamo che una volta calcolata la $\text{div } \mathbf{V}$, mediante l'equazione (16), l'equazione (12) fornisce, con una quadratura rispetto al tempo, la componente ζ della vorticità. Dopo ciò la (11) diventa un'equazione in cui è incognita la sola componente w della velocità. Avute le tre quantità $\text{div } \mathbf{V}$, ζ , w , le componenti u , v della velocità saranno fornite dalle equazioni

$$(17) \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \text{div } \mathbf{V} - \frac{\partial w}{\partial z}.$$

La (5) fornirà poi, con una quadratura rispetto al tempo, la variazione di densità elettronica n_1 . Successivamente dalla (6) si ricavano le componenti del campo elettrico $\mathbf{E}$; infine dalla (1) quelle del campo magnetico indotto $\mathbf{H}$.

4. Supponiamo ora che nel plasma considerato, nell'ipotesi che riempia tutto lo spazio, per effetto di una piccola perturbazione si propaghino delle onde piane in cui le varie grandezze siano proporzionali al fattore esponenziale $e^{i(Lx+My+Nz-\omega t)}$, essendo ω la pulsazione ed L , M , N i numeri d'onda, proporzionali alla direzione del vettore χ di propagazione.

Poiché in tal caso risulta

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -i\omega \mathbf{V}, \quad \Delta_2 \mathbf{V} = -(L^2 + M^2 + N^2) \mathbf{V} = -\chi^2 \mathbf{V}, \\ \text{div } \mathbf{V} &= i(Lu + Mv + Nw) = i\mathbf{V} \times \chi, \quad \text{grad div } \mathbf{V} = -\mathbf{V} \times \chi \cdot \chi, \\ \text{rot } \mathbf{V} &= i\chi \wedge \mathbf{V}, \end{aligned}$$

l'equazione (8) diventa

$$(19) \quad \begin{aligned} i\omega (\omega^2 - c^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) \mathbf{V} + b_0 (\omega^2 \mathbf{k} - c^2 N \chi) \wedge \mathbf{V} + \\ + [i\omega (c^2 - v_0^2) \chi + b_0 c^2 \chi \wedge \mathbf{k}] \cdot \mathbf{V} \times \chi = 0, \end{aligned}$$

che dà luogo al seguente sistema di equazioni scalari

$$(20) \quad \begin{aligned} i\omega (\omega^2 - c^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) u - b_0 \{ \omega^2 v + c^2 N (Mw - Nv) \} + \\ + \{ i\omega (c^2 - v_0^2) L + b_0 c^2 M \} \mathbf{V} \times \chi = 0 \\ i\omega (\omega^2 - c^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) v - b_0 \{ -\omega^2 u + c^2 N (Nu - Lw) \} + \\ + \{ i\omega (c^2 - v_0^2) M - b_0 c^2 L \} \mathbf{V} \times \chi = 0 \\ i\omega (\omega^2 - c^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) w - b_0 c^2 N (Lv - Mu) + i\omega (c^2 - v_0^2) N \cdot \mathbf{V} \times \chi = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo in queste equazioni in luogo di $\mathbf{V} \times \chi$ la sua espressione $Lu + Mv + Nw$, e ordinando, si ha un sistema di tre equazioni lineari omogenee in u , v , w . Uguagliando a zero il determinante dei coefficienti di queste quantità si ha un'equazione (di dispersione), che lega la pulsazione ω ai numeri d'onda L , M , N .

Per ricavare in modo più semplice questa equazione osserviamo che moltiplicando ambo i membri della (19) scalarmente per χ , per $\chi \wedge \mathbf{k}$, e per $\mathbf{k}$,

si ottiene il nuovo sistema di tre equazioni linearmente indipendenti

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & i\omega (\omega^2 - v_0^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) \cdot \mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} + b_0 \omega^2 \cdot \mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} \wedge \mathbf{k} = 0 \\
 & - b_0 (\omega^2 - c^2 \chi^2) \cdot \mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} + i\omega (\omega^2 - c^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) \cdot \mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} \wedge \mathbf{k} + \\
 & \quad + b_0 N (\omega^2 - c^2 \chi^2) w = 0 \\
 & i\omega (c^2 - v_0^2) N \cdot \mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} + b_0 c^2 N \cdot \mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} \wedge \mathbf{k} + i\omega (\omega^2 - c^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) w = 0,
 \end{aligned}$$

che sono lineari omogenee nelle tre quantità $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi}$, $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} \wedge \mathbf{k}$, w .

Uguagliando a zero il determinante dei coefficienti, sviluppando questo determinante, trascurando la radice $\omega = 0$, e ponendo per semplicità

$$(22) \quad \omega_1^2 = c^2 \chi^2 + v_0^2 c^2, \quad \omega_2^2 = v_0^2 \chi^2 + v_0^2 c^2,$$

si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \omega^2 (\omega^2 - \omega_1^2) \{ (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) - b_0^2 (\omega^2 - c^2 \chi^2) \} + \\
 & + b_0^2 v_0^2 N^2 (\omega^2 - c^2 \chi^2) \left(\omega^2 - c^2 \chi^2 - \frac{v_0^2 c^2}{v_0^2} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

alla quale si perviene anche, com'è naturale, ponendo nell'equazione (16), in luogo di w , oppure di $\text{div } \mathbf{V}$, o di ξ , una quantità proporzionale, secondo un fattore costante, all'esponenziale $e^{i(Lx + My + Nz - i\omega t)}$.

Sviluppando e ordinando la [23] rispetto alle potenze di ω^2 , si ottiene

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & \omega^8 - (2\omega_1^2 + \omega_2^2 + b_0^2) \omega^6 + [2\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_1^4 + b_0^2 (\omega_1^2 + c^2 \chi^2 + v_0^2 N^2)] \omega^4 - \\
 & - \{ \omega_1^4 \omega_2^2 + b_0^2 c^2 [\chi^2 \omega_1^2 + N^2 (\omega_2^2 + v_0^2 \chi^2)] \} \omega^2 + b_0^2 c^4 N^2 \chi^2 \omega_2^2 = 0,
 \end{aligned}$$

che è un'equazione di 4° grado in ω^2 , dove i segni dei coefficienti sono alternativamente positivi e negativi. Quindi se le radici in ω^2 sono tutte reali esse sono anche tutte positive. In generale vi saranno perciò quattro modi possibili di propagazione ondosa.

5. Vogliamo ora vedere se in un plasma, nelle condizioni considerate, sia possibile la propagazione di onde trasversali, di onde cioè in cui la velocità delle particelle elettroniche è perpendicolare alla direzione di propagazione e quindi $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} \equiv Lu + Mv + Nw = 0$.

In tal caso, supposto $w \neq 0$, per le (21) dovrà essere simultaneamente

$$\mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} \wedge \mathbf{k} \equiv Mu - Lv = 0$$

$$\omega^2 - c^2 \chi^2 = 0, \quad \omega^2 - c^2 \chi^2 - v_0^2 c^2 = 0.$$

Le ultime due equazioni sono ovviamente incompatibili fra di loro, a meno che sia $v_0 = 0$; ma questo per la prima delle (9) equivale a supporre $n_0 = 0$, oppure $e = 0$, ciò che è assurdo. Dunque per $w \neq 0$ non possono sussistere onde trasversali.

Se oltre ad essere $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} = 0$, supponiamo ancora $w = 0$, consideriamo cioè un moto delle particelle parallele al piano xy , dalla terza delle (20) si deduce che deve essere $N = 0$, oppure $Lv - Mu = 0$.

Nel primo caso, in cui è $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} = 0$, $w = 0$, $N = 0$, avremo intanto

$$(25) \quad Lu + Mv = 0.$$

Le prime due delle (20) diventano

$$(26) \quad \begin{aligned} i\omega(\omega^2 - c^2\chi^2 - v_0^2 c^2)u - b_0\omega^2 v &= 0 \\ i\omega(\omega^2 - c^2\chi^2 - v_0^2 c^2)v + b_0\omega^2 u &= 0, \quad (\chi^2 = L^2 + M^2), \end{aligned}$$

Le quali sono compatibili solo se $v = \pm iu$. Assumendo $v = iu$, per la (25) sarà anche $M = iL$, e quindi $\chi^2 = 0$. Le (26) si riducono, per $\omega \neq 0$, all'unica equazione

$$(27) \quad \omega^2 - b_0\omega - v_0^2 c^2 = 0,$$

che fornisce per ω i valori

$$(28) \quad \left. \begin{matrix} \omega' \\ \omega'' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (b_0 \pm \sqrt{b_0^2 + 4v_0^2 c^2}).$$

In questo caso si hanno onde piane in cui le varie grandezze sono proporzionali al fattore esponenziale $e^{-yL + i(Lx - \omega t)}$, e vanno quindi attenuandosi con legge esponenziale nella direzione dell'asse y ; ma esse sono onde che possono dirsi *pseudo-trasversali*.

Nel caso in cui è $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi} = 0$, $w = 0$, $Lv - Mu = 0$, sarà ancora verificata la (25) e avremo nuovamente $v = iu$, $M = iL$. Le prime due delle equazioni (20) saranno allora identicamente verificate se

$$(29) \quad c^2(\omega^2 - c^2 N^2 - v_0^2 c^2) - b_0(\omega^2 - c^2 N^2) = 0$$

che è un'equazione di 3° grado in ω , che ha sempre almeno una radice reale. In questo caso si avranno onde piane in cui le grandezze del campo e del moto saranno proporzionali al fattore esponenziale $e^{-Ly + i(Lx + Nz - \omega t)}$, i cui piani di propagazione sono paralleli all'asse y e vanno attenuandosi con legge esponenziale nella direzione di quest'asse. Anche queste onde possono dirsi *pseudo-trasversali*.

È opportuno osservare che le radici della (29) sono tutte e tre reali, e si hanno quindi tre modi reali di propagazione, se

$$c^2(v_0^4 + 20N^2 v_0^2 - 8N^4) + 4b_0^2 N^2 > 0.$$

6. Ci possiamo domandare ancora se, e quando, si hanno onde longitudinali, tali cioè che la velocità delle particelle sia parallela alla direzione di propagazione. In questo caso le componenti u, v, w della velocità saranno proporzionali ai numeri d'onda L, M, N , e quindi le equazioni del sistema (20)

si ridurranno alle seguenti

$$i\omega (\omega^2 - v_0^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) L - b_0 M (\omega^2 - c^2 \chi^2) = 0$$

$$i\omega (\omega^2 - v_0^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) M + b_0 L (\chi^2 - c^2 \omega^2) = 0$$

$$i\omega (\omega^2 - v_0^2 \chi^2 - v_0^2 c^2) N = 0.$$

Queste sono identicamente verificate se si ha simultaneamente

$$\omega^2 - v_0^2 \chi^2 - v_0^2 c^2 = 0, \quad \omega^2 - c^2 \chi^2 = 0,$$

la qual cosa richiede che sia $(c^2 - v_0^2) \chi^2 - v_0^2 c^2 = 0$, e quindi

$$(30) \quad \chi^2 \equiv L^2 + M^2 + N^2 = \frac{v_0^2 c^2}{c^2 - v_0^2}, \quad \omega^2 = \frac{v_0^2 c^4}{c^2 - v_0^2}, \quad \left(\frac{\omega^2}{\chi^2} = c^2 \right).$$

Si tratta quindi di onde che possono propagarsi in una direzione qualsiasi con velocità di fase ω^2/χ^2 uguale alla velocità della luce nel vuoto.

7. Consideriamo infine il caso generale in cui il moto avviene in piani paralleli al piano xy , e quindi $w = 0$. In questo caso, riferendosi al sistema (21) avremo

$$(31) \quad \frac{\mathbf{V} \times \boldsymbol{\chi}}{\mathbf{V} \wedge \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{k}} = - \frac{b_0 \omega^2}{i\omega (\omega^2 - v_0^2 \chi^2 - v_0^2 c^2)} = \frac{i\omega (\omega^2 - c^2 \chi^2 - v_0^2 c^2)}{b_0 (\omega^2 - c^2 \chi^2)} = - \frac{b_0 c^2}{i\omega (c^2 - v_0^2)}.$$

Uguagliando il secondo rapporto al quarto, e poi il terzo rapporto al quarto, si ricavano le equazioni

$$(32) \quad \omega^2 = \frac{c^2}{v_0^2} (v_0^2 \chi^2 + v_0^2 c^2)$$

$$(c^2 - v_0^2) \omega^4 - c^2 [(c^2 - v_0^2) (\chi^2 + v_0^2) + b_0^2] \omega^2 + b_0^2 c^4 \chi^2 = 0.$$

Eliminando ω^2 fra queste due equazioni si ha

$$(33) \quad \chi^2 = \frac{b_0^2 c^2}{(c^2 - v_0^2)^2} - \frac{v_0^2 c^2}{v_0^2}$$

e quindi

$$(34) \quad \omega^2 = \frac{b_0^2 c^4}{(c^2 - v_0^2)^2}.$$

In questo caso si ha ancora dalle (31)

$$(35) \quad \frac{Lu + Mv}{Mu - Lv} = i, \quad \text{e quindi} \quad v = - \frac{L - iM}{M + iL} u.$$

Scrivendo la (33) nella forma

$$(33') \quad N^2 = \frac{b_0^2 c^2}{(c^2 - v_0^2)^2} - \frac{v_0^2 c^2}{v_0^2} - (L^2 + M^2),$$

e supponendo le costanti L, M reali saranno possibili onde del tipo considerato in cui le varie grandezze sono proporzionali al fattore esponenziale $e^{i(Lx+My+Nz-\omega t)}$, con $w = 0$, ed u, v legati dalla relazione (35), quando il secondo membro della (33') è positivo. Se poi questo secondo membro è negativo, ponendo

$$N = i\gamma = i \sqrt{L^2 + M^2 + \frac{v_0^2 c^2}{v_0^2} - \frac{b_0^2 c^2}{(c^2 - v_0^2)^2}},$$

si avranno onde in cui le varie grandezze saranno proporzionali al fattore esponenziale $e^{-\gamma z + i(Lx+My-\omega t)}$, che si propagano quindi parallelamente al piano xy , e vanno attenuandosi colla profondità a partire dal piano $z = 0$. Si hanno cioè onde trasversali rispetto al campo magnetico esterno, che possono chiamarsi superficiali, la cui considerazione può essere utile in Astrofisica nel caso in cui una regione di un astro sia assimilabile a un plasma che riempie un semispazio. Dette onde superficiali, per dati valori delle costanti L, M , possono evidentemente verificarsi per valori del campo magnetico applicato sufficientemente piccoli, in modo che il secondo membro della (33') sia negativo.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] COHEN M. H., *Radiation in a plasma I. Cerenkov effect*, « Phys. Rev », **113**, 711 (1961);
IDEM, *Radiation in a plasma II. Equivalent sources*, « Phys. Rev. », **126**, n. 2, 389 (1962 a).
- [2] DENISSE J. F. e DELCROIX J. L., *Théorie des ondes dans les plasmas*, Dunod, Paris, 1961.
- [3] FABRIZIO M., *La propagazione in un plasma « caldo » soggetto a un campo magnetico*, « Memoria dell'Accad. delle Scienze di Torino », serie 4^a, n. 10 (1969).