Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gheorghe Gheorghiev, Margareta Ignat

Su alcuni moti intrinsechi notevoli nell'idrodinamica. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.3, p. 317–323.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_3_317_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Idrodinamica. — *Su alcuni moti intrinsechi notevoli nell'idrodinamica.* Nota I di GHEORGHE GHEORGHIEV e MARGARETA IGNAT, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — By the mobile frame method, slow motions of fluids are studied, establishing the existence and arbitrarity of the regular solutions for ideal, compressible fluids in permanent and nonpermanent regime.

Geometrical interpretations concerning the congruences and complexes of lines determined by the velocity field are given.

1. INTRODUZIONE.

Ci proponiamo di studiare le proprietà intrinseche di alcuni moti notevoli della idrodinamica. Si tratta dei moti lenti, elicoidali e quasi–rigidi. A questo fine utilizzeremo interpretazioni geometriche e cinematiche sui campi di vettori nel caso di un moto stazionario e, precisamente, le proprietà delle linee vettoriali del campo e della varietà ortogonale a queste, la quale, in generale, è una superficie non olonoma, oppure, in particolare, una famiglia uniparametrica di superfici. Un altro aspetto dei campi di vettori è la considerazione del complesso di rette, il loro supporto.

Nel caso dei moti non stazionari, i campi dei vettori che vi intervengono, e che dipendono dal punto e dal tempo, saranno interpretati come varietà di coni nello spazio euclideo, i quali, in modo particolare possono essere coni di rotazione, o possono ridursi a porzioni di piani e allora si ottengono di nuovo le varietà non olonome lineari.

Quest'ultimo caso appare, per esempio, nello studio di un moto quasi–rigido quando vi interviene un piano non olonomo, o, con altre parole, il complesso lineare di rette. Questa caratteristica è naturale se pensiamo che nei moti di un corpo solido le traiettorie, generalmente, sono curve di un complesso lineare di rette.

Faremo lo studio mediante il metodo del riferimento mobile di Cartan adeguato e non solo mediante quello del triedro Frenet delle linee di corrente come si usa di solito [2], [3], [7], [8], [10], quando si parla dei moti intrinsechi nella idrodinamica e magnetoidrodinamica. In queste note ci limiteremo al caso dei moti intrinsechi nell'idrodinamica.

Per alcuni moti notevoli dei fluidi indagheremo tanto il problema di esistenza di soluzioni regolari, come la generalità di queste.

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1970.

2. Il riferimento mobile.

A ciascun punto M del dominio nel quale ha luogo la corrente del liquido e a un dato istante di tempo t, associamo un triedro triortogonale con il vertice in M.

Per lo spostamento elementare dM e la variazione di tempo dt abbiamo [6]:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{dM} = \omega^k \mathbf{I}_k \quad , \quad \mathrm{d}\mathbf{I}_k = \omega \times \mathbf{I}_k \, ,$$

dove $\omega^k = \mathrm{dM} \cdot \mathbf{I}_k$ sono le componenti del vettore spostamento dM e $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore di Darboux del riferimento; più preciso, se poniamo $\boldsymbol{p} = p_k \mathbf{I}_k$, ecc., allora abbiamo:

$$\text{(2)} \qquad p = \boldsymbol{p} \cdot \mathrm{dM} + p_t \, \mathrm{d}t \quad , \quad q = \boldsymbol{q} \cdot \mathrm{dM} + q_t \, \mathrm{d}t \quad , \quad r = \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{dM} + r_t \, \mathrm{d}t \, .$$

Il vettore di Darboux sarà:

$$\text{(3)} \qquad \omega = p\mathbf{I}_1 + q\mathbf{I}_2 + r\mathbf{I}_3 \, .$$

Le condizioni d'integrabilità cui soddisfano le funzioni introdotte: $p_i , q_i , r_i , p_t , q_t , r_t$ $(i = 1 , 2 , 3)$, che dipendono da 4 argomenti, vengono dedotte dalle equazioni di struttura dello spazio euclideo, e saranno [5]:

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r} = 0 \quad ; \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = 0 \quad ; \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = 0;$$

$$\text{(5)} \qquad \dot{\boldsymbol{p}} + q_t \boldsymbol{r} - r_t \boldsymbol{q} = \mathrm{grad}\, p_t \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{q}} + r_t \boldsymbol{p} - p_t \boldsymbol{r} = \mathrm{grad}\, q_t \, ;$$
$$\dot{\boldsymbol{r}} + p_t \boldsymbol{q} - q_t \boldsymbol{p} = \mathrm{grad}\, r_t \, ,$$

dove:

$$\text{(6)} \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial p_k}{\partial t} \mathbf{I}_k + p_k \frac{\partial \mathbf{I}_k}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial t} = \mathbf{I}_2 r_t - \mathbf{I}_3 q_t \, , \qquad \text{ecc.}$$

Osservazioni.

1) Per i moti permanenti nelle formole scritte si deve mettere $p_t , q_t , r_t = 0$.

2) Se soltanto $p_t = q_t = 0$, allora il campo della velocità $\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_3$ ha direzione stazionaria; qui si inquadra il problema dei moti ondulatori. Se $\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_1$ le condizioni $p_t = q_t = 0$, esprimono il fatto che il cono locale della velocità nel punto M si riduce a una porzione di piano, poiché $\partial \boldsymbol{v} / \partial t = v_t \mathbf{I}_1 + v r_t \mathbf{I}_2$. In questo caso si dice che il movimento nonstazionario ha luogo su una varietà non olonoma lineare, oppure, in particolare, su una famiglia uniparametrica di superfici.

3) Se $p_t = 0$ e $q_t = \varphi_t \sin \alpha$, $r_t = \varphi_t \cos \alpha$, dove α non dipende dal tempo, ma può dipendere dal punto, allora il campo $\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_3$, in ciascun punto del dominio di definizione, descrive un cono di rotazione. Per $\alpha = 0$ ritroviamo il caso dell'osservazione precedente che comprende i moti ondulatori ciò che permette di dire che il movimento sulla varietà dei coni di rotazione è un movimento ondulatorio generalizzato. Queste ultime considerazioni faranno l'oggetto di un'altra nota.

Applicazioni.

1. Se la velocità del moto permanente di un fluido incompressibile è $\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_3$, l'equazione di continuità appare sotto la forma:

$$v_3 = v\,(p_2 - q_1)\,. \tag{7}$$

2. Le tangenti alle linee di corrente generano un complesso di rette, lo studio intrinseco del quale può essere fatto con le seguenti formole generali [4]:

$$\rho = \frac{i_4\, i_6}{i_5^2 + i_6^2} \quad , \quad a = \frac{i_4\, i_5}{i_5^2 + i_6^2} \quad , \quad \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{i_6}{i_5}\,, \tag{8}$$

dove:

$$i_4 = p_3^2 + q_3^2 \quad , \quad i_5 = p_3\,\rho_1 + q_3\,\rho_2 \quad , \quad i_6 = q_3\,\rho_1 - p_3\,\rho_2\,, \tag{9}$$

con:

$$\rho_1 = p_2\, q_3 - p_3\, q_2 \quad , \quad \rho_2 = p_3\, q_1 - p_1\, q_3\,.$$

In queste relazioni ρ determina l'ascissa del centro euclideo della generatrice, a – la curvatura, mentre l'ultima fissa il riferimento canonico del complesso. Se il triedro canonico è quello coordinato, allora $q_1 = q_3 = 0$ e la curvatura del complesso sarà $a = -1 : q_2$.

Caso particolare notevole.

Se la curvatura del complesso è costante, allora dalle condizioni di integrabilità (4) si desume che avremo in più $p_2 = r_2 = 0$, che mostrano che il complesso delle normali principali alle linee di corrente $(\mathbf{I}_2)$ del riferimento canonico di cui sopra si riduce a una congruenza di rette.

Ha luogo il seguente teorema: nel caso dei moti permanenti di un fluido, se il complesso delle normali principali alle linee di corrente degenera in una congruenza di rette e sono soddisfatte due delle condizioni seguenti:

1) il fluido è incompressibile, 2) il moto è isotacheo, 3) la congruenza delle linee di corrente è minimale $(p_2 - q_1 = 0)$, allora ha luogo anche la terza e in questo caso il complesso delle tangenti alle linee di corrente sarà di curvatura costante.

Se il fluido è ideale e la forza esterna che agisce è conservativa, l'equazione del moto assume la forma: $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{v} = \nabla \mathrm{L}$. Nel nostro caso essa diventa:

$$v^2\, p_3\, \mathbf{I}_2 = \nabla \mathrm{L}' \quad , \quad \mathrm{L}' = \mathrm{L} - v^2/2\,.$$

Applicando il rotore a entrambi i membri avremo le seguenti condizioni di integrabilità:

$$p_{3,3} = 0 \quad , \quad p_1 + r_3 = 0 \quad , \quad \ln (v^2 p_3)_1 + r_2 = 0$$

$$(\text{dove:} \quad \mathrm{d}p_3 = p_{3,1}\,\omega^1 + p_{3,2}\,\omega^2 + p_{3,3}\,\omega^3)\,.$$

La prima di esse mostra che le linee di corrente sono di curvatura costante e la seconda che la congruenza delle normali principali alle linee di corrente è normale a una famiglia di superficie.

3. Moti lenti.

Consideriamo le equazioni dell'idrodinamica per un fluido barotropo, con le forze esterne conservative:

$$(10) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = \nabla \mathrm{L} + \frac{(\mu'+\lambda')}{\rho}\,\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \frac{\mu'}{\rho}\,\Delta\boldsymbol{v} \quad , \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

dove: $\boldsymbol{v}$ – è il vettore della velocità del fluido, ρ – è la densità, λ' e μ' – sono i coefficienti di viscosità, $\mathbf{F} = \nabla \mathrm{U}$, $\mathrm{L} = -\mathrm{P} + \mathrm{U}$, $\mathrm{P} = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$.

Definizione 1: Si chiama moto lento nell'idrodinamica un moto per il quale

$$(11) \qquad (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = 0\,.$$

Scegliendo il riferimento in modo che $\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_3$, la relazione (11) diventa

$$(12) \qquad q_3 = p_3 = 0 \quad , \quad v_3 = 0\,,$$

ciò che significa che le linee di corrente sono rette e il moto è isotacheo, cioè il valore della velocità non varia lungo le linee di corrente [9]. È vera ugualmente la reciproca.

Così, l'insieme delle linee vettoriali del moto lento stazionario, genera una congruenza di rette e nel caso dei moti non stazionari un complesso di rette. In questo modo risulta una nuova possibilità di mettere in evidenza le proprietà geometriche dei moti lenti.

Invero, per le congruenze di rette, l'equazione quadratica delle ascisse dei fuochi di una generatrice sarà:

$$\Delta\rho^2 - (p_2 - q_1)\,\rho + 1 = 0\,, \qquad \text{dove} \quad \Delta \equiv p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$$

(ciò che esclude il caso delle congruenze cilindriche), mentre l'equazione delle superfici sviluppabili è:

$$q_2\,p^2 - (p_2 + q_1)\,pq + p_1\,q^2 = 0\,.$$

L'equazione quadratica delle ascisse dei punti limiti su una generatrice è data da:

$$t^2 - \frac{(q_1 - p_2)}{\Delta}\,t + \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{(p_1+q_2)^2}{4\,\Delta^2}\right] = 0$$

e l'equazione delle rigate principali sarà:

$$(q_2 - p_1)\,(q^2 - p^2) + 2\,(p_2 + q_1)\,pq = 0\,.$$

Da qui risulta che l'ascissa del punto medio del raggio è: $t_0 = \frac{p_2 - q_1}{\Delta}$.

Casi particolari. La congruenza di rette sarà parabolica (i suoi raggi sono tangenti a una superficie) se:

$$\text{(i)} \qquad (p_2 + q_1)^2 - 4\, p_1 q_2 = 0 \,,$$

essa sarà normale se:

$$\text{(ii)} \qquad p_1 + q_2 = 0$$

e infine, se avranno luogo le condizioni:

(iii) $p_2 + q_1 = 0 \quad , \quad p_1 - q_2 = 0,$ la congruenza sarà isotropa.

Così, per esempio, se le linee di corrente di un movimento lento formano una congruenza parabolica, normale o isotropa, allora alle condizioni (12) viene aggiunto rispettivamente (i), (ii), (iii).

COROLLARIO. *Nel caso di un moto lento permanente, di un fluido sia ideale, oppure viscoso, il piano Lamb, cioè il piano dei vettori* $\boldsymbol{v}$, rot $\boldsymbol{v}$ *inviluppa una famiglia di superfici rigate le quali sono evidentemente superfici di Bernoulli. Invero, da* (11) *abbiamo*

$$(\text{rot}\ \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = -\frac{\nabla v^2}{2}\,,$$

poiché rot $\boldsymbol{v} = v_2 \mathbf{I}_1 - v_1 \mathbf{I}_2 - v i_1 \mathbf{I}_3$, *con* $i_1 = p_1 + q_2$, *da cui risulta* $q_2 + r_3 = 0$.

Condizioni di integrabilità.

Dalla equazione dinamica (10_1) segue che i moti lenti nei fluidi:

a) ideali in regime permanente non sono sottoposti a nuove condizioni di integrabilità. In questi condizioni, dalla $\nabla L = 0$ si determina la pressione che agisce sul fluido, supponendo che il campo delle forze esterne sia conosciuto,

b) viscosi nel regime stazionario verificano la relazione: $\text{rot}^3\, \boldsymbol{v} = 0$,

c) ideali nel regime non permanente sono sottoposti alla condizione $\partial/\partial t\ \text{rot}\ \boldsymbol{v} = 0$, e infine,

d) viscosi nel regime non stazionario soddisfano: $\partial/\partial t\ \text{rot}^3\, \boldsymbol{v} = 0$.

Mettiamo in evidenza alcuni aspetti particolari di essi.

– Per esempio, nel caso *a*) discuteremo l'esistenza dei moti lenti in regime permanente e la generalità delle soluzioni regolari.

Quanto all'esistenza dei moti lenti permanenti di un fluido ideale il problema torna allo studio del seguente sistema di equazioni Pfaff:

$$(13) \qquad \begin{aligned} p &= p_1\, \omega^1 + p_2\, \omega^2 \quad , \quad q = q_1\, \omega^1 + q_2\, \omega^2, \\ r &= r_1\, \omega^1 + r_2\, \omega^2 - q_2\, \omega^3 \quad , \quad \mathrm{d}\,(\ln v) = v_1\, \omega^1 \,, \end{aligned}$$

dove il riferimento è stato scelto per la condizione $v_2 = 0$.

Qui abbiamo $n = 3$ pfaffiani indipendenti $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, $s_0 = 4$ equazioni e $N = 7$ funzioni incognite $(p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2, v_1)$. Ricercando se questo sistema è in involuzione si determinano, con il metodo noto [1], i suoi caratteri: $s_1 = 4$, $s_2 = 3$.

Il sistema (13) è in involuzione e le sue soluzioni regolari generiche dipendono da 3 funzioni arbitrarie a due argomenti. Se il fluido è incompressibile ($p_2 - q_1 = 0$), le soluzioni dipendono solamente da due funzioni.

– Nel caso *b*), adoperando come sopra con $v_2 = 0$, si ottiene:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = - v_1 \mathbf{I}_2 - v i_1 \mathbf{I}_3 \tag{14}$$

e

$$\operatorname{rot}^2 \boldsymbol{v} = - [(v i_1)_2 + v_1 (p_2 + q_1)] \mathbf{I}_1 + [(v i_1)_1 + v_1 (p_1 - q_2)] \mathbf{I}_2 + \\ + [v i_1^2 - (v_{11} + v_1 r_2) \mathbf{I}_3 .$$

Se $p_1 = q_2 = 0$, allora abbiamo ancora $r_3 = 0$, donde:

$$\operatorname{rot}^2 \boldsymbol{v} = \lambda_1 \mathbf{I}_1 + \lambda_3 \mathbf{I}_3 , \quad \text{dove:} \quad \lambda_1 = v_1 (p_2 + q_1) , \quad \lambda_3 = v_{11} + v_1 r_2 .$$

Esprimendo la condizione *b*) si trova:

$$\lambda_{3,2} = 0 \quad , \quad \lambda_{1,3} - \lambda_{3,1} + \lambda_1 q_1 = 0 \quad , \quad \lambda_{1,2} = \lambda_1 r_1 ,$$

o brevemente

$$\nabla \lambda_3 = (p_2 + q_1) \{ v_1 (p_2 + q_1) \mathbf{I}_1 + [v_1 (r_1 + 3 r_2) - \lambda_3] \mathbf{I}_3 \} .$$

Da qui risulta che se $p_2 + q_1 = 0$, $\lambda_3 = \text{const.}$ è la sola condizione di integrabilità.

La condizione imposta $p_1 = q_2 = 0$ e la sua conseguenza $r_3 = 0$ mostrano che avremo un sistema triplo ortogonale di superfici delle quali due famiglie sono rigate, aventi lo stesso sistema di generatrici. Se, di più, $p_2 + q_1 = 0$, allora la famiglia delle superfici ortogonali a $\boldsymbol{v}$ sarà una famiglia di sfere.

– Nel caso *c*) dei moti non stazionari dei fluidi ideali, la condizione di integrabilità: $\partial/\partial t \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$, esprime che tanto la grandezza di $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ quanto la sua direzione sono stazionarie. Tenendo conto dalla formola (14) quest'ultima relazione ci da:

$$r_t v_1 - v i_1 q_t = 0 \quad , \quad v_{1,t} - v i_1 p_t = 0 \quad , \quad v_1 p_t + v_t i_1 + v i_{1,t} = 0 .$$

Nell'ipotesi $v_1 \neq 0$ (poiché nel caso contrario la grandezza della velocità diventa una costante assoluta) avremo: $r_t = \dfrac{v}{v_1} i_1 q_t$.

Lo studio dell'esistenza delle soluzioni regolari, in questo caso si riduce alla ricerca dell'involuzione del sistema:

$$\begin{aligned} p &= p_1 \omega^1 + p_2 \omega^2 + p_t \, dt \quad , \quad q = q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2 + q_t \, dt , \\ r &= r_1 \omega^1 + r_2 \omega^2 - q_2 \omega^3 + \frac{v}{v_1} i_1 q_t \, dt \quad , \quad dv = v_1 \omega^1 + v_t \, dt . \end{aligned} \tag{15}$$

Qui abbiamo $n = 4$, $s_0 = 4$ e $N = 10$. Applicando la teoria di Cartan si stabilisce che il sistema non è contraddittorio e che i suoi caratteri saranno $s_1 = 4$, $s_2 = 4$, $s_3 = 2$. Da qui segue che (15) è in involuzione e le sue soluzioni dipenderanno da due funzioni a 3 argomenti. Se il fluido è incompressibile, aggiungendo al sistema (15) la relazione finita $p_2 - q_1 = 0$, si ottengono i seguenti caratteri: $s_1 = s_2 = 4$, $s_3 = 1$ e ne abbiamo dunque la conclusione rispettiva.

BIBLIOGRAFIA.

[1] CARTAN E., *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Paris 1945.

[2] COBURN N., *Instrinsic relations satisfied by the vorticity and velocity vectors in fluid flow theory*. «Michigan Math. J.», *1*, 113–130 (1952).

[3] COBURN N., *Intrinsic form of the characteristic relations in the steady supersonic flow of a compressible fluid*. «Quart. Apl. Math.», *15*, 237–248 (1957).

[4] GHEORGHIEV GH., *Despre geometria intrinsecă a unui cîmp de vectori*. «Studii și cercet. șt. Acad. R. P. R. Filiala Iași», *2*, 1–21 (1951).

[5] GHEORGHIEV GH. *Cîteva probleme geometrice legate de un cîmp de vectori*. «Bul. St. Sect. șt. mat. și fiz.», *6*, 101–123 (1954).

[6] GHEORGHIEV GH., *Proprietăți geometrico diferențiale ale mișcărilor nestaționare din hidrodinamică și magnetohidrodinamică*. «An. șt. Univ. Iași», *6*, 265–290 (1960).

[7] GRANDORI-GUACENTI E., *Sulle equazioni intrinseche della magnetofluidodinamica*. «Boll. UMI», *19*, 460–464 (1964).

[8] GIANNI MOLINA C., *Sulle equazioni intrinseche della magnetofluidodinamica*. «Rendiconti Istituto Lombardo», *A*. *102*, 442–452 (1968).

[9] ROMAN A., *Aspecte geometrice legate de mișcarea lentă a unui fluid vîscos*. «An. șt. Univ. Iași», *6*, 315–320 (1960).

[10] TRUESDELL C., *Intrinsic equations of spatial gas flow*. «Z.A.M.M.», *40*, 9–14 (1960).