Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Caricato

Un problema elastico bidimensionale con vincoli di frontiera unilaterali. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.3, p. 311–316.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_3_311_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Fisica matematica. — *Un problema elastico bidimensionale con vincoli di frontiera unilaterali* (*). Nota II di GAETANO CARICATO, presentata (**) dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — The study of the equilibrium of a rigid bar, leaned on the boundary of an elastic half-plane, with a normal eccentric external load, was begun in a previous paper, and here is continued. The contact between the bar and the half-plane partially lacking is considered here, and on this condition an explicit solution of the problem is deduced.

Nella precedente Nota I si è considerata una sbarra rigida rettilinea appoggiata senza attrito lungo la retta limite di un semipiano elastico omogeneo e isotropo, e premuta su questo eccentricamente da una sollecitazione normale all'appoggio. Sono state precisate le condizioni atte a garantire che l'appoggio avesse luogo lungo tutta la sbarra, e in tale ipotesi è stata determinata una soluzione esplicita del problema.

Nella presente Nota II si ammette che il centro di pressione sia tanto eccentrico da provocare un parziale distacco della sbarra dall'appoggio. Anche in queste condizioni si riesce a determinare una soluzione esplicita e cioè la zona di effettivo contatto, la distribuzione delle pressioni in essa, nonché lo stress e lo spostamento in tutto il semipiano elastico.

I paragrafi saranno numerati in proseguimento a quelli della Nota I.

PARTE III. – CASO IN CUI IL CONTATTO INTERESSA UNA SOLA PARTE DELLA SBARRA.

6. *Caso limite* $x_c = a/2 = |\mathrm{MN}|/4$.

Come già si è osservato nel paragrafo 5, la formola (5.11), ossia

$$p(x) = \frac{2\left(\frac{x_c}{a} - 1\right)x - 2x_c + 3a}{\pi\sqrt{a^3 x\left(2 - \frac{x}{a}\right)}} \qquad 0 \leq x \leq 2a$$

mostra che la pressione $p(x)$ risulta positiva in tutto l'intervallo $(a/2, 3a/2)$, e che è soddisfatta la limitazione $(2.6)_2$

$$p(x) \geq 0 \qquad 0 \leq x \leq 2a$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca matematica n. 115. 1032. O 5172 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1970.

anche in condizioni limite, ad esempio per

$$x_c = a/2 = |\mathrm{MN}|/4 . \tag{6.1}$$

In questo caso la precedente espressione di $p(x)$ diviene

$$p(x) = \frac{\mathrm{P}}{2\pi x_c}\sqrt{\frac{4x_c - x}{x}} ; \tag{6.2}$$

da essa appare che se il centro di pressione C coincide con uno degli estremi del nocciolo centrale, la pressione si annulla nell'estremo della sbarra più lontano da C, ed è infinita nell'estremo più vicino. Inoltre le costanti γ ed α [cfr. (5.12)] assumono nel suddetto caso limite i seguenti valori:

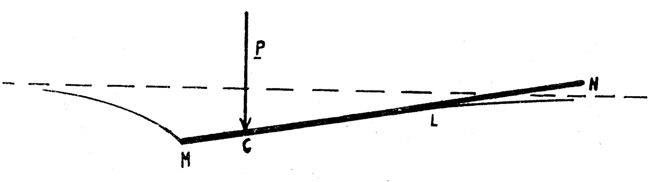
$$\gamma = \frac{2}{\mathrm{E}\pi}\int_0^{2a} \log|b - x|\, p(x)\, dx - \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{E}\pi}\left(\log\frac{a}{2} - 1\right) \quad , \quad \alpha = -\frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{E}a\pi} . \tag{6.3}$$

7. *Caso in cui il centro di pressione è esterno al nocciolo centrale.*

Si ammetta ora che il centro di pressione non soddisfi la condizione (5.14), e cada, per esempio, all'interno dell'intervallo $(0 , a/2)$:

$$0 < x_c < a/2 . \tag{7.1}$$

In tal caso si deve plausibilmente ritenere che il contatto fra sbarra e semipiano abbia luogo soltanto lungo una porzione della sbarra, producendosi il distacco nella parte residua. È anche plausibile ammettere (salvo controllo a posteriori) che il segmento di effettivo contatto abbia un estremo coincidente con l'estremo M della sbarra più vicino al carico; l'altro estremo, L, per il momento incognito, essendo compreso fra C e N. Inoltre *nell'estremo* L *confinante con la zona di distacco è ragionevole presumere l'annullarsi della pressione.*



Se tali condizioni sono effettivamente realizzate, le cose vanno come se il semipiano τ fosse di fatto premuto da un segmento rigido ML di lunghezza 2λ di $2a$:

$$|\mathrm{ML}| = 2\lambda < 2a .$$

L'annullarsi della pressione all'estremo L di questo segmento fa ritenere che la distribuzione delle pressioni in ML sia quella corrispondente a uno stato limite (cfr. par. 6) relativo a una ipotetica sbarra di lunghezza ML, la parte residua LN potendo essere ignorata. Ciò equivale a *presumere* valide, continuando a porre in M l'origine delle ascisse, le formole seguenti, che sono l'adattamento delle formole (6.1), (6.2) e (6.3) alla situazione attuale:

$$4\,|\mathrm{MC}| = |\mathrm{ML}| = 2\lambda \tag{7.2}$$

$$p(x) = \frac{\mathrm{P}}{2\pi x_c}\sqrt{\frac{4x_c - x}{x}} = \frac{\mathrm{P}}{\pi\lambda}\sqrt{\frac{2\lambda - x}{x}} \qquad 0 \leq x \leq 2\lambda \tag{7.3}$$

$$\gamma = \frac{2}{\mathrm{E}\pi}\int_0^{2\lambda} \log|b - x|\, p(x)\,dx - \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{E}\pi}\left(\log\frac{\lambda}{2} - 1\right) \quad , \quad \alpha = -\frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{E}\lambda\pi}. \tag{7.4}$$

La (7.2) individua univocamente l'estremo punto di contatto L in funzione della posizione del centro di pressione C [per il quale viene supposta naturalmente la disuguaglianza (7.1)].

Determinato così il valore di $\lambda \equiv |\mathrm{ML}|/2$, la (7.3) fornirà la distribuzione delle pressioni in ML, e le (7.4) daranno rispettivamente lo spostamento normale in M e l'inclinazione della sbarra.

Le considerazioni ora svolte hanno portato dunque a presumere che, posto, in base alla (7.2),

$$\lambda = 2\,x_c\,,$$

una soluzione del problema formulato nel paragrafo 2, quando il contatto interessa una sola parte della sbarra, sia data dalle formole seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
&p(x) = \frac{\mathrm{P}}{\pi\lambda}\sqrt{\frac{2\lambda - x}{x}} \qquad 0 \leq x \leq 2\lambda \quad , \quad \frac{\lambda}{2} = x_c < \frac{a}{2}\\
&\mathrm{X}_{11}(x, y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\lambda} \frac{(x-\bar{x})^2 y}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}\, p(\bar{x})\,d\bar{x}\,,\\
&\mathrm{X}_{12}(x, y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\lambda} \frac{(x-\bar{x})\, y^2}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}\, p(\bar{x})\,d\bar{x}\,,\\
&\mathrm{X}_{22}(x, y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\lambda} \frac{y^3}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}\, p(\bar{x})\,d\bar{x}\,,\\
&u_1(x, y) = -\frac{1}{\mathrm{E}\pi}\int_0^{2\lambda} \left\{ (1-\nu)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-\bar{x}}{y}\right) - \frac{(1+\nu)(x-\bar{x})\,y}{(x-\bar{x})^2 + y^2} \right\} p(\bar{x})\,d\bar{x}\,,\\
&u_2(x, y) = -\frac{2}{\mathrm{E}\pi}\int_0^{2\lambda} \left\{ \log[(x-\bar{x})^2 + y^2]^{1/2} + \frac{(1+\nu)(x-\bar{x})^2}{2[(x-\bar{x})^2 + y^2]} \right\} p(\bar{x})\,d\bar{x} +\\
&\qquad\qquad + \frac{2}{\mathrm{E}\pi}\int_0^{2\lambda} \log|b-x|\, p(x)\,dx + \frac{(1+\nu)\mathrm{P}}{\mathrm{E}\pi}\,,\\
&\gamma = \frac{2}{\mathrm{E}\pi}\int_0^{2\lambda} \log|b - x|\, p(x)\,dx - \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{E}\pi}\left(\log\frac{\lambda}{2} - 1\right) \quad , \quad \alpha = -\frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{E}\pi\lambda}.
\end{aligned}\right. \tag{7.5}$$

8. *Controllo della validità della soluzione presunta.*

Non v'è dubbio che con la semplice sostituzione del numero λ al numero a tutti i controlli svolti nei paragrafi 3 e 5 conservano la loro validità. Si può quindi ritenere senz'altro acquisito che lo stress X_{rs} contenuto nelle (7.5) soddisfa le equazioni indefinite (2.1) in ogni punto interno al semipiano τ, nonché le condizioni ai limiti (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) e (2.7). Inoltre la $p(x)$ data dalla $(7.5)_1$ soddisfa l'equazione integrale [cfr. (5.2)]

$$(8.1)\quad u_2(x,0) \equiv \frac{2}{E\pi}\int_0^{2\lambda} \log\frac{1}{|x-\bar{x}|}\,p(\bar{x})\,d\bar{x} + \frac{2}{E\pi}\int_0^{2\lambda} \log|b-x|\,p(x)\,dx = \gamma + \alpha x$$

$$0 \le x \le 2\lambda$$

ossia la condizione $(2.6)_1$, γ ed α essendo date dalle $(7.5)_7$, nonché la condizione (2.8).

Affinché siano soddisfatte tutte le condizioni formulate nel par. 2 occorre soltanto verificare che la soluzione (7.5) rende soddisfatta anche la condizione $(2.6)_2$, cioé l'unica condizione non considerata fino ad ora. Questa traduce l'effettivo *distacco* fra sbarra e semipiano τ, lungo il segmento LN e si esprime, in termini espliciti, con la disuguaglianza

$$(8.2)\quad \begin{cases} u_2(x,0) - (\gamma+\alpha x) \equiv \dfrac{2}{E\pi}\displaystyle\int_0^{2\lambda} \log\frac{1}{|x-\bar{x}|}\,p(\bar{x})\,d\bar{x} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{2}{E\pi}\displaystyle\int_0^{2\lambda} \log|b-x|\,p(x)\,dx + \\ - \left\{\dfrac{2}{E\pi}\displaystyle\int_0^{2\lambda} \log|b-x|\,p(x)\,dx - \dfrac{2P}{E\pi}\left(\log\dfrac{\lambda}{2}-1\right) - \dfrac{2P}{E\pi\lambda}x\right\} > 0 \\ \qquad\qquad 2\lambda < x \le 2a\,. \end{cases}$$

Si verificherà ora la disuguaglianza (8.2), dopo aver costatato che essa si semplifica al modo seguente:

$$(8.2)'\quad \frac{E\pi}{2}\left[u_2(x,0) - (\gamma+\alpha x)\right] \equiv \frac{P}{\lambda}x + \\ + \int_0^{2\lambda} \log\frac{1}{|x-\bar{x}|}\,p(\bar{x})\,d\bar{x} - P\left(1+\log\frac{2}{\lambda}\right) > 0\,.$$

A tale scopo si tenga presente che tutte le formole dei paragrafi 5 e 6 sono tutt'ora valide purché al numero a si sostituisca il numero λ, e si ponga $x_c = \lambda/2$ ove occorra. La costante B e la funzione $\bar{U}(\rho,\theta)$ divengono ora [(1)]

$$(8.3)\qquad B = -\frac{P}{\lambda}\quad,\quad \bar{U}(\rho,\theta) = P\log\frac{2\rho}{\lambda} - P\rho\cos\theta$$

(1) Cfr. le (5.8), (5.9), (5.12) e l'espressione originaria di B data in (5.4).

mentre la trasformazione (5.7) diviene

$$(8.4)\qquad x-\lambda=\frac{\lambda}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta\quad,\quad y=\frac{\lambda}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta\,.$$

In conseguenza il primo membro della (8.2)′ può anche scriversi

$$(8.2)''\qquad \frac{E\pi}{2}\,[u_2(x\,,0)-(\gamma+\alpha x)]\equiv-\frac{P}{2}\,\rho\cos\theta+\frac{P}{2\rho}\cos\theta+P\log\rho\,.$$

Lungo tutti i punti del segmento ML, avendosi per essi $\rho=1$, la (8.2)″ mostra, com'è già noto, che si ha $[u_2(x\,,0)-(\gamma+\alpha x)]_{\rho=1}=0$. In tutti i punti del tratto residuo LN, ivi risultando $0<\rho\leq 1$, $\theta=0$, la (8.2)″ dà

$$(8.5)\qquad F(\rho)\equiv\frac{E\pi}{2}\,[u_2(x\,,0)-(\gamma+\alpha x)]_{\theta=0}=-\frac{P}{2}\,\rho+\frac{P}{2\rho}+P\log\rho$$
$$0<\rho\leq 1\,.$$

Poiché si ha

$$F(1)=0\quad,\quad F'(1)=0\quad,\quad F''(1)=0\quad,\quad F'''(1)=-P<0\,,$$

è evidente che in un immediato intorno *destro* ($\rho\leq 1$) dell'estremo L la funzione $F(\rho)$ è decrescente e quindi positiva e la sbarra perciò si distacca dal semipiano τ. Ma si verifica anche facilmente che in ogni punto interno all'intervallo $(0\,,1)$ la funzione $F(\rho)$ risulta positiva [2].

A tale scopo si prendano in esame nell'intervallo $(0\,,1)$ la funzione

$$(8.6)\qquad \Phi(\rho)\equiv\rho^2F(\rho)\equiv-\frac{P}{2}\,\rho^3+\frac{P}{2}\,\rho+P\rho^2\log\rho$$

e le sue derivate

$$(8.7)\qquad \Phi'(\rho)=-\frac{3}{2}\,P\rho^2+2\,P\rho\log\rho+P\rho+\frac{P}{2}$$

$$(8.8)\qquad \Phi''(\rho)=-3\,P\rho+2\,P\log\rho+3\,P\quad,\quad \Phi'''(\rho)=-3\,P+\frac{2P}{\rho}\,.$$

e si provi a supporre che $\Phi(\rho)$, visibilmente nulla per $\rho=0$ e $\rho=1$ abbia uno zero in un punto ρ_1 interno all'intervallo $(0\,,1)$. In tal caso $\Phi'(\rho)$ avrebbe almeno uno zero in ciascuno dei due intervalli $(0\,,\rho_1)$, $(\rho_1\,,1)$. D'altra parte $\Phi'(\rho)$ si annulla per $\rho=1$; perciò se ammettesse tre zeri distinti dovrebbero esistere, comprese fra essi, due radici distinte di $\Phi''(\rho)$. Ma quest'ultima funzione si annulla di certo per $\rho=1$; di conseguenza $\Phi'''(\rho)$ dovrebbe ammettere almeno due radici distinte. Questa circostanza è assurda perché dalla $(8.8)_2$ si trae che $\Phi'''(\rho)$ si annulla soltanto per $\rho=2/3$. È assurdo perciò supporre che $\Phi(\rho)$ e di conseguenza $F(\rho)$ abbiano uno zero internamente

(2) Cfr. C. CATTANEO, Complementi alla Nota *Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici*, « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », 178, Roma 1946.

all'intervallo (0 , 1); si può concludere pertanto che nei punti interni al suddetto intervallo esse risultano sempre positive, ciò che equivale a dire che lungo il segmento LN c'è effettivo distacco.

Risulta così provato che le (7.5) forniscono una soluzione del problema meccanico formulato nel paragrafo 2, nel caso di parziale distacco fra sbarra e semipiano elastico. Naturalmente, come già si è detto nella Nota I a proposito del caso di contatto completo fra sbarra e semipiano elastico, anche nel caso di parziale distacco resta da risolvere il problema dell'unicità che sarà l'argomento di un prossimo lavoro.