Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Froim Marcus

Encore sur les réseaux a invariants absolus constants ou fonction d'une seule variable

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.3, p. 306–308.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_3_306_0>

Geometria differenziale. — *Encore sur les réseaux a invariants absolus constants ou fonction d'une seule variable.* Nota di FROIM MARCUS, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

RIASSUNTO. — Si rilevano i legami fra alcuni risultati di E. Bompiani, di G. Tzitzeica, B. Segre e F. Marcus.

Dans une Note de ces Rendiconti [1] j'ai mis en évidence les deux théorèmes suivants:

1. THÉORÈME de Tzitzeica–B. Segre. *Si les réseaux* (x) *et* (x_1) *transformés de Laplace l'un de l'autre, sont à invariant absolu constant, alors tous les réseaux de la suite de Laplace de* (x) *sont à invariant absolu constant.*

Ce théorème rentre comme cas particulier dans le théorème suivant de F. Marcus:

2. THÉORÈME. *Si les réseaux* (x) *et* (x_1) *transformés de Laplace l'un de l'autre sont tous les deux à invariant absolu fonction de* u *ou de* v, *tous les réseaux de la suite de Laplace de* (x) *sont à invariant absolu fonction de* u *respectivement de* v.

Le but de cette Note est de donner une interprétation géométrique à ces théorèmes en vertu de quelques résultats de M. Bompiani [2] sur les équations de Laplace, résultats desquels nous avons pris connaissance récemment. Pour plus de clarté nous exposons ces résultats.

Soit (x) un réseau de l'espace projectif S_n et

$$x_{uv} + au_u + bx_v + cx = 0, \tag{1}$$

l'équation de Laplace correspondante.

Il est bien connu que à une telle équation on peut associer les deux formes différentielles

$$h \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \quad \text{et} \quad k \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v, \tag{2}$$

où $h = a_u + ab - c$ et $k = b_v + ab - c$, et la connaissance des formes (2) déterminent complètement l'équation (1) dans le groupe de transformations $x = \lambda(u, v) x'$ et $u = u(\bar{u})$, $v = v(\bar{v})$.

Si l'on considère $n + 1$ $(n \geq 2)$ solutions indépendantes de (1) comme coordonnées homogènes d'un point x de S_n alors le point x décrit une surface Φ sur laquelle les lignes u et v forment un réseau (x). Soit $[x]$ la suite de

(*) Nella seduta del 14 marzo 1970.

Laplace du réseau (x). La transformation de Laplace $x_i = (x_{i-1})_v + a_{i-1}\, x_{i-1}$ ou $x_{-i} = (x_{-i+1})_u + b_{-i+1}\, x_{-i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ fait passer généralement d'un point x_{i-1} d'une surface Φ_{i-1} à un point x_i de Φ_i ou de x_{-i+1} au point x_{-i} de Φ_{-i}.

Avec Π^i, Π^i_u, Π^i_v nous notons respectivement les plans tangents et osculateurs aux courbes u et v dans les points x_i des surfaces Φ_i.

M. Bompiani considère les courbes extrémales des formes associées (2). Elles sont données par les équations

$$(3)\qquad \begin{aligned} du\, d^2 v - dv\, d^2 u &= \left(\frac{\partial \log h}{\partial u}\, du - \frac{\partial \log h}{\partial v}\, dv\right) du\, dv\,, \\ du\, d^2 v - dv\, d^2 u &= \left(\frac{\partial \log k}{\partial u}\, du - \frac{\partial \log k}{\partial v}\, dv\right) du\, dv\,, \end{aligned}$$

et si $n > 3$ ces courbes appartiennent aux systèmes nommés par M. Bompiani [3] *systèmes des courbes planaires.*

De même M. Bompiani montre que dans le S_4 2 – osculateur en x à Φ déterminé par les points $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}$, les plans osculateurs aux courbes (3_1) forment un cône cubique qui s'appuie (en droites) en dehors du plan tangent Π à un autre plan (double pour le cône) qui est comme les courbes (3) invariant avec Φ. Ce plan lie les points

$$A x_u - x_{uu} \quad ; \quad B x_v - x_{vv} \qquad \text{avec} \quad A = (\log h)_u - 2\, b \quad ; \quad B = (\log h)_v - 2\, a$$

qui appartiennent respectivement aux plans Π_u et Π_v.

Un second *plan invariant* est obtenu en considérant les courbes (3_2) et changeant h avec k dans les expressions de A et B.

On obtient ainsi deux droites invariantes dans chacun des plans osculateurs Π^i_u *et* Π^i_v *de la suite de Laplace* $[x]$. Puis M. Bompiani donne le beau théorème suivant:

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante afin que l'invariant absolu* h/k *soit fonction de la seule variable* u *(ou de la seule* v*) est que les deux droites invariantes situées dans* Π_v *(dans* Π_u*) coincident. Et si les droites coincident dans* Π_u *et* Π_v *on a* $h/k = \text{const.}$ *et réciproquement.*

Ces résultats de M. Bompiani, conjointement avec les deux théorèmes de ci–dessus, permettent la formulation suivante:

THÉORÈME. *Si en deux plans osculateurs successifs* Π_v *et* Π^1_v $(\Pi_u$ *et* $\Pi^1_u)$ *les deux droites invariantes coincident, elles coincideront dans chacun des plans osculateurs* Π^i_v (Π^i_u) *de la suite de Laplace* $[x]$.

THÉORÈME. *Si les droites invariantes situées dans les plans osculateurs* Π_u, Π_v *et* Π^1_u, Π^1_v *coincident, elles coincideront dans chacun des plans* Π^i_u *et* Π^i_v.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] F. MARCUS, *Sur le réseaux à invariant absolu constant ou fonction d'une seule variable*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », serie 8ª, *38*, 486–487 (1965).

[2] E. BOMPIANI, *Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », serie 6ª, 84–90 (1927).

[3] E. BOMPIANI, *Sulla corrispondenza puntuale fra due superfici a punti planari*, « Boll. Un. Mat. Ital. », IV (1925).

[4] G. TZITZEICA, *Sur certains réseaux*. « C. R. Acad. Sc. Paris », T. 200, 191–192 (1935).

[5] F. MARCUS, *Sur quelques résultats de H. Ionas et G. Tzitzeica*, « Bull. Math. de la Soc. Roumaine de Sc. », T. 47 (1, 2), 29–34 (1945–1946).

[6] B. SEGRE, *Sur les invariants projectifs absolus attachés aux éléments curvilignes et aux réseaux*, « Journal de Math. pures et appliquées », T. 40, 135–154 (1961).