Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Caricato

Un problema elastico bidimensionale con vincoli di frontiera unilaterali. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.2, p. 205–214.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_2_205_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Fisica matematica. — *Un problema elastico bidimensionale con vincoli di frontiera unilaterali* (*). Nota I di GAETANO CARICATO, presentata (**) dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — A rigid bar leaned on the boundary of an elastic half-plane, with a normal eccentric external load is in equilibrium. The contact between the bar and the half-plane can be partially wanting.

In this paper the conditions assuring that the contact between the bar and the half-plane is entire are determined, and in these conditions an explicit solution of the problem is deduced.

Parte I. – POSIZIONE DEL PROBLEMA.

1. *Introduzione*. Com'è noto, quando nell'elastostatica ordinaria si considera un corpo elastico soggetto a vincoli di appoggio unilaterali, ci si viene a trovare in presenza di condizioni « ambigue » al contorno, non potendosi precisare a priori su quale parte del contorno si avrà effettivo contatto. Un indirizzo di ricerca di carattere molto generale su questioni di tal tipo è stato istituito dal compianto prof. A. Signorini, il quale ha stabilito fra l'altro teoremi di unicità delle soluzioni (1). Un teorema generale di esistenza e unicità è stato assegnato da G. Fichera (2). Contributi alla formazione di teoremi di minimo sono stati dati da G. Grioli e dall'autore del presente lavoro (3). Sono rare peraltro in tal genere di questioni soluzioni esatte di problemi concreti e mancano direttive generali di risoluzione (4).

Per tal motivo mi è sembrato interessante, onde avere un'idea precisa dell'andamento di questi fenomeni, prendere in esame un problema tipico bidimensionale. Precisamente si consideri una sbarra rigida rettilinea appog-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca matematica n. 115.1032.0 5172 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1970.

(1) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 4ª, « Annali di Matematica pura ed applicata » (IV), vol. LI, 1960.

(2) G. FICHERA, *Problemi con vincoli unilaterali: Il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, « Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei » (VIII), vol. VII, 1964.

(3) G. GRIOLI, *Problemi d'integrazione e formulazione integrale del problema fondamentale dell'Elastostatica*, Simposio internazionale sulle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica, Cremonese, Roma 1965. G. CARICATO, *Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato, anisotropo e non omogeneo, con stress iniziale*, Note I e II, « Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei » (VIII), vol. XLIV, 1968.

(4) Il prof. C. Cattaneo ha considerato il problema del contatto fra una piastra rigida ellittica e un semispazio elastico quando l'azione normale che comprime l'una sull'altro è eccentrica [Pressione eccentrica di un cilindro rigido a base ellittica sopra un suolo elastico, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Roma 1947]. La soluzione data in questo lavoro è peraltro subordinata all'ipotesi che il centro di pressione non sia esterno a un certo nocciolo centrale, ciò che esclude ogni distacco della piastra dal suo appoggio.

giata senza attrito lungo la retta limite di un semipiano elastico, e su questo premuta eccentricamente da una sollecitazione normale all'appoggio. Supposto raggiunto l'equilibrio, ci si propone di stabilire:

a) quali condizioni garantiscono che l'appoggio abbia luogo lungo tutta la sbarra e, subordinatamente, la legge di distribuzione delle pressioni;

b) non sussistendo tali condizioni, su quale porzione di sbarra viene a mancare il contatto, e qual'è in tal caso la legge di distribuzione delle pressioni nella zona di effettivo contatto.

2. *Formulazione analitica del problema.* Al problema sopra enunciato si può dare la seguente formulazione analitica. Sia dato un semipiano τ elastico, omogeneo e isotropo, e lungo la sua retta limite l sia appoggiata una sbarra rigida rettilinea sottile MN, di lunghezza $2a$, premuta sul semipiano da una forza normale **P** applicata in un suo punto C. Supposto raggiunto l'equilibrio, in uno *stato di stress piano*, ci si propone di determinare la distribuzione degli sforzi e degli spostamenti in tutto il semipiano τ, senza escludere l'eventualità che l'effettivo contatto fra sbarra e semipiano possa venire a mancare in qualche tratto di sbarra. A tale scopo, scelto un riferimento cartesiano ortogonale con l'origine nel punto M, l'asse x sovrapposto alla retta limite l e orientato concordemente al segmento MN, il semiasse positivo y nel semipiano τ, si indichino con $X_{rs}(x, y)$ $(r, s = 1, 2)$ le componenti dello stress e con $u_r(x, y)$ le componenti dello spostamento.

Ciò posto, il problema sopra considerato equivale, da un punto di vista analitico, a determinare nel semipiano τ una soluzione $X_{rs}(x, y)$ del seguente sistema di equazioni indefinite

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} X_{11} + \frac{\partial}{\partial y} X_{12} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial x} X_{12} + \frac{\partial}{\partial y} X_{22} = 0 \end{aligned}\right\} & \textit{equazioni di equilibrio} \\ \Delta_2 (X_{11} + X_{22}) = 0 & \textit{condizione di congruenza} \end{cases}$$

soddisfacente ulteriormente le seguenti condizioni:

$$(2.2)\qquad \lim_{(x,y)\to\infty} X_{rs}(x, y) = 0 \qquad (r, s = 1, 2)$$

$$(2.3)\qquad X_{11}(x, 0) = 0 \qquad -\infty < x < 0,\ 2\lambda < x < \infty,\ \lambda \leq a$$

$$(2.4)\qquad X_{12}(x, 0) = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

$$(2.5)\qquad -X_{22}(x, 0) \equiv p(x) \begin{cases} = 0 & -\infty < x < 0 \\ \geq 0 & 0 \leq x \leq 2\lambda \leq 2a \\ = 0 & 2\lambda < x < \infty \end{cases}$$

$$(2.6)\qquad u_2(x, 0) - (\gamma + \alpha x) \begin{cases} = 0 & 0 \leq x \leq 2\lambda \\ > 0 & 2\lambda < x \leq 2a \end{cases}$$

i valori delle costanti λ, γ ed α essendo da determinare. Alla funzione $p(x) \equiv - X_{22}(x, o)$ si impongono ulteriormente i seguenti requisiti:

a) soddisfi le condizioni globali

$$(2.7) \qquad \int_0^{2\lambda} p(x)\, dx = P \qquad \int_0^{2\lambda} x\, p(x)\, dx = P x_c$$

x_c essendo l'ascissa, nota, del centro di pressione C;

b) quando si ha effettivo distacco di una parte della sbarra e quindi $\lambda < a$, la $p(x)$ si annulli nell'estremo del segmento di contatto ove inizia il distacco fra sbarra e semipiano:

$$(2.8) \qquad p(2\lambda) = o \qquad \lambda < a.$$

La (2.2) impone l'infinitesimalità dello stress all'allontanarsi indefinito del punto (x, y) dalla sbarra. Le (2.3), (2.4), $(2.5)_1$ e $(2.5)_3$ impongono l'annullarsi dello stress nei punti della retta limite al di fuori del segmento $(o, 2\lambda)$ di effettivo contatto. La (2.4) traduce l'annullarsi dello sforzo tangenziale all'interno di detto segmento $(o, 2\lambda)$ a causa dell'assenza di attrito. La $(2.5)_2$ esprime il carattere positivo della pressione all'interno dello stesso segmento $(o, 2\lambda)$, dovuto all'unitaleralità del vincolo di appoggio.

La $(2.6)_1$ impone, come effetto del contatto con la sbarra rigida, che lo spostamento normale dei punti del segmento $(o, 2\lambda)$ corrisponda ad uno spostamento rigido infinitesimo $\gamma + \alpha x$: γ rappresenterà allora lo spostamento subito dal punto M, ed α la rotazione infinitesima subita dalla sbarra. La condizione $(2.6)_2$ impone che al di là del punto 2λ $(2\lambda < x \leq 2a)$ si abbia *effettivo distacco* fra sbarra e semipiano.

Infine le condizioni globali (2.7) garantiscono l'equilibrio della sbarra sotto l'azione della forza normale **P** concentrata in C e della pressione normale $-p(x)$ su di essa esercitata dal semipiano lungo il segmento $(o, 2\lambda)$; l'ulteriore condizione (2.8) valida soltanto in condizioni di effettivo parziale distacco, è intesa ad assicurare la continuità della pressione $p(x)$ nel punto in cui inizia il distacco fra sbarra e semipiano elastico.

Parte II. – Caso di contatto esteso a tutta la sbarra.

3. *Formole di Flamant.* Si supponga dapprima che, raggiunto l'equilibrio, la sbarra rigida MN risulti interamente appoggiata al contorno del semipiano τ, e sia quindi $\lambda = a$. Dalle condizioni precisate nel paragrafo precedente va quindi esclusa la (2.8) valida soltanto per $\lambda < a$.

Avendo indicato con $p(x) \equiv - X_{22}(x, o)$ l'incognita distribuzione di pressioni nell'intervallo $(o, 2a)$, lo stress da essa determinato in tutto il semipiano τ è dato dalle seguenti formole [5]:

$$
(3.1) \qquad \begin{cases}
X_{11}(x\,,y) = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \dfrac{(x-\bar{x})^2\,y}{[(x-\bar{x})^2+y^2]^2}\,p(\bar{x})\,d\bar{x}\,, \\[2ex]
X_{12}(x\,,y) = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \dfrac{(x-\bar{x})\,y^2}{[(x-\bar{x})^2+y^2]^2}\,p(\bar{x})\,d\bar{x}\,, \\[2ex]
X_{22}(x\,,y) = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \dfrac{y^3}{[(x-\bar{x})^2+y^2]^2}\,p(\bar{x})\,d\bar{x}\,.
\end{cases}
$$

Si può subito verificare, ancor prima di determinare la $p(x)$, che lo stress espresso dalle (3.1) soddisfa le equazioni indefinite (2.1) e le condizioni (2.2), (2.3), (2.4), $(2.5)_1$ e $(2.5)_3$ quando si ammettano per la $p(x)$ le proprietà seguenti, facilmente verificabili a posteriori:

a) l'intervallo $(0\,,2\,a)$ sia decomponibile in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la $p(x)$ sia monotona;

b) la $p(x)$ sia continua nell'intervallo aperto $(0\,,2\,a)$ e sommabile nel medesimo intervallo, chiuso.

Infatti, com'è facile controllare eseguendo direttamente i calcoli, le funzioni (3.1) soddisfano le equazioni indefinite (2.1) in ogni punto interno al semipiano τ. Inoltre per $(x\,,y) \rightarrow \infty$ esse sono visibilmente infinitesime [condizione (2.2)] e sulla retta limite, esternamente al segmento $(0\,,2\,a)$, danno

$$(3.2) \qquad X_{11}(x\,,0) = 0 \quad , \quad X_{12}(x\,,0) = 0 \quad , \quad X_{22}(x\,,0) = 0 \qquad x < 0\,, x > 2\,a\,.$$

La prima e la terza delle (3.2) corrispondono rispettivamente alle condizioni (2.3), $(2.5)_1$, $(2.5)_3$ mentre la seconda dà la condizione (2.4) limitatamente all'esterno del segmento $(0\,,2\,a)$. È facile poi verificare che nei punti interni al segmento $(0\,,2\,a)$ risulta

$$(3.3) \qquad X_{22}(x\,,0) = -p(x) \qquad 0 < x < 2\,a\,.$$

(5) Le (3.1) sono sostanzialmente dovute a M. Flamant. [Cfr. M. FLAMANT, *Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement*, Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Vol. 114°, Janvier–Juin 1892, Paris]. Se si indica con P una forza normale concentrata in un punto O della retta limite d'un semipiano elastico e si usano le notazioni introdotte nel par. 2, la legge di distribuzione delle tensioni determinata da Flamant può essere scritta nella forma seguente:

$$X_{11} = -\frac{2\,P}{\pi r^4}\,x^2 y \quad , \quad X_{12}(x\,,y) = -\frac{2\,P}{\pi r^4}\,x y^2 \quad , \quad X_{22}(x\,,y) = -\frac{2\,P}{\pi r^4}\,y^3$$

r essendo la distanza del generico punto X del semipiano dal punto O. Se si estendono le formole precedenti al caso di una sollecitazione normale $p(x)$ ripartita sull'intervallo $(0\,,2\,a)$ della retta limite del semipiano medesimo, si ottengono le formole (3.1).

Allo scopo si consideri un qualunque punto x interno all'intervallo $(0\,,\,2\,a)$. In tal caso, indicando con ε un numero positivo sufficientemente piccolo, si può scrivere

$$(3.1)'_3 \qquad X_{22}(x\,,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\frac{y^3}{[(x-\bar{x})^2+y^2]^2}\,p(\bar{x})\,d\bar{x} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{y^3}{[(x-\bar{x})^2+y^2]^2}\,p(\bar{x})\,d\bar{x} - \frac{2}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2a}\frac{y^3}{[(x-\bar{x})^2+y^2]^2}\,p(\bar{x})\,d\bar{x}\,.$$

È immediato verificare che 1° e 3° integrale sono nulli per $y = 0$. Quanto al 2° integrale, posto $\zeta = \bar{x} - x$, esso può scriversi

$$(3.4) \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{p(\zeta)}{[1+(\zeta/y)^2]^2}\,d(\zeta/y)\,.$$

Di qui, mediante applicazione del secondo teorema della media si riconosce che, al tendere di y a zero, l'integrale tende a $\frac{\pi}{2}\,p(x)$. Si ha quindi

$$\lim_{y\to 0} X_{22}(x\,,y) = X_{22}(x\,,0) = -p(x) \qquad 0 < x < 2\,a\,,$$

ossia la (3.3).

Con metodo analogo si dimostra che la $X_{12}(x\,,y)$ definita dalla $(3.1)_2$ è nulla nei punti del segmento $(0\,,\,2\,a)$,

$$X_{12}(x\,,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 2\,a\,.$$

Quanto precede assicura che lo stress dato dalle formole (3.1), ancor prima che sia determinata l'espressione effettiva della $p(x)$ (salvo verifica a posteriori delle ipotesi fatte sulla $p(x)$ medesima) soddisfa a una buona parte delle condizioni del problema analitico formulato al paragrafo 2, e precisamente alle equazioni indefinite (2.1) e alle condizioni ai limiti (2.2), (2.3), (2.4), $(2.5)_1$ e $(2.5)_3$. Rimangono da soddisfare le condizioni $(2.5)_2$, (2.6) e (2.7) le quali, come si vedrà al paragrafo 5, impongono una precisa determinazione della $p(x)$.

4. *Deduzione degli spostamenti*. Com'è noto, lo spostamento $u_r(x\,,y)$ del generico punto del semipiano τ, corrispondente allo stress dato dalle (3.1) può essere determinato mediante le relazioni

$$(4.1) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{E}(X_{11} - \nu X_{22}) \quad , \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{1}{E}(X_{22} - \nu X_{11})\,,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{G}X_{12} \quad , \quad \frac{\partial u_3}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)$$

ove le costanti $E\,,\,\nu\,,\,G$ sono rispettivamente il modulo di elasticità longitudinale, il coefficiente di contrazione di Poisson, il modulo di elasticità torsionale $[G \equiv E/2\,(1+\nu)]$.

Da $(4.1)_1$ e $(4.1)_2$ si trae

$$
(4.2)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_1(x\,,y) &= -\frac{1}{E\pi}\int_0^{2a}\left\{(1-\nu)\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\overline{x}}{y}\right)-\frac{(1+\nu)(x-\overline{x})\,y}{(x-\overline{x})^2+y^2}\right\}\cdot\\
&\quad\cdot p(\overline{x})\,d\overline{x}+F_1(y)\\
u_2(x\,,y) &= -\frac{2}{E\pi}\int_0^{2a}\left\{\log\left[(x-\overline{x})^2+y^2\right]^{1/2}+\frac{(1+\nu)(x-\overline{x})^2}{2\left[(x-\overline{x})^2+y^2\right]}\right\}\cdot\\
&\quad\cdot p(\overline{x})\,d\overline{x}+\mathbf{F}_2(x)
\end{aligned}
\right.
$$

$F_1(y)$, $F_2(x)$ essendo due funzioni da determinare, mentre la $(4.1)_3$ dà

$$
(4.3)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\equiv-\frac{4(1+\nu)}{E\pi}\int_0^{2a}\frac{(x-\overline{x})\,y^2}{\left[(x-\overline{x})^2+y^2\right]^2}\,p(\overline{x})\,d\overline{x}+
$$

$$
+\frac{dF_1}{dy}+\frac{dF_2}{dx}=-\frac{2}{G\pi}\int_0^{2a}\frac{(x-\overline{x})\,y^2}{\left[(x-\overline{x})^2+y^2\right]^2}\,p(\overline{x})\,d\overline{x}
$$

donde, in virtù dell'identità $\frac{4(1+\nu)}{E}=\frac{2}{G}$, segue

$$
(4.4)\qquad F_1(y)=Cy+A\quad,\quad F_2(x)=-Cx+B
$$

A , B , C essendo tre costanti. Aggiungendo l'ipotesi che nel punto improprio dell'asse y sia $u_1=0$, e che un punto assegnato dell'asse x, di ascissa $x=b$, abbia la componente u_2 nulla, le costanti A , B , C vengono ad avere i valori seguenti:

$$
(4.5)\qquad A=0\quad,\quad B=\frac{2}{E\pi}\int_0^{2a}\log|b-x|\,p(x)\,dx+\frac{(1+\nu)\,P}{E\pi}\quad,\quad C=0.
$$

Le componenti u_1 , u_2 dello spostamento diventano pertanto

$$
(4.6)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_1(x\,,y) &= -\frac{1}{E\pi}\int_0^{2a}\left\{(1-\nu)\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\overline{x}}{y}\right)-\frac{(1+\nu)(x-\overline{x})\,y}{(x-\overline{x})^2+y^2}\right\}p(\overline{x})\,d\overline{x}\\
u_2(x\,,y) &= -\frac{2}{E\pi}\int_0^{2a}\left\{\log\left[(x-\overline{x})^2+y^2\right]^{1/2}+\frac{(1+\nu)(x-\overline{x})^2}{2\left[(x-\overline{x})^2+y^2\right]}\right\}\cdot\\
&\quad\cdot p(\overline{x})\,d\overline{x}+\frac{2}{E\pi}\int_0^{2a}\log|b-x|\,p(x)\,dx+\frac{(1+\nu)}{E\pi}\,P.
\end{aligned}
\right.
$$

Si rileva dalle (4.6) che per $\sqrt{x^2+y^2}\rightarrow\infty$ soltanto la componente u_1 rimane limitata mentre, come s'è già rilevato, lo stress tende regolarmente a zero.

5. *Determinazione della pressione di contatto fra sbarra e semipiano.* Ci si propone ora di determinare opportunamente la funzione incognita $p(x) \equiv - X_{22}(x, 0)$ $(0 \leq x \leq 2a)$ e le costanti γ ed α, in modo da soddisfare la condizione $(2.6)_1$ e le condizioni globali (2.7) precisando nel contempo quali valori di x_c assicurano il contatto lungo tutta la sbarra $(0 \leq x \leq 2a)$.

A tale scopo si osservi che dalla $(4.6)_2$ si trae

$$(5.1) \qquad u_2(x, 0) = \frac{2}{E\pi}\int_0^{2a} \log\frac{1}{|x-\bar{x}|}\, p(\bar{x})\, d\bar{x} + \frac{2}{E\pi}\int_0^{2a} \log|b-x|\, p(x)\, dx$$

e che in virtù della (2.6), valutata per $\lambda = a$, deve risultare

$$(5.2) \qquad \frac{2}{E\pi}\int_0^{2a} \log\frac{1}{|x-\bar{x}|}\, p(\bar{x})\, d\bar{x} + \frac{2k}{\pi E} = \gamma + \alpha x \qquad 0 \leq x \leq 2a$$

con

$$(5.3) \qquad k = \int_0^{2a} \log|b-x|\, p(x)\, dx.$$

La funzione $p(x)$ deve pertanto soddisfare l'equazione integrale (5.2) la quale, posto

$$(5.4) \qquad A = \frac{1}{2} E\pi\gamma - k \quad , \quad B = \frac{E\pi\alpha}{2}$$

può anche scriversi

$$(5.2)' \qquad \int_0^{2a} p(\bar{x}) \log\frac{1}{|x-\bar{x}|}\, d\bar{x} = A + Bx \qquad 0 \leq x \leq 2a.$$

Questa equazione rientra in un tipo di equazioni integrali già studiato [6]. La sua risoluzione si può ricondurre, per esempio, a un problema armonico piano di Dirichlet. Se ne richiama brevemente il procedimento risolutivo.

Introdotta nel piano Mxy la funzione

$$(5.5) \qquad U(x, y) = \int_0^{2a} p(\bar{x}) \log\frac{1}{\sqrt{(x-\bar{x})^2 + y^2}}\, d\bar{x}$$

(6) Cfr. per esempio, C. CATTANEO, *Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici*, « Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei », vol. XXIX, 1939; Complementi alla Nota *Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici*, « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », Roma 1946; *Sull'attrito di rotolamento nei solidi elastici.* Nota II, « Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei », (VIII), vol. II, 1947.

che rappresenta il potenziale logaritmico dell'incognita distribuzione di pressioni $p(x)$ interpretata come densità lineare di massa attraente, la funzione medesima risulta completamente caratterizzata dalle proprietà seguenti:

1) è armonica in tutto il piano privato del segmento $\mathrm{MN} \equiv (0 \leq x \leq \leq 2a, y = 0)$;

2) si comporta asintoticamente come la funzione $-\frac{P}{2} \log (x^2 + y^2)$;

3) nei punti del segmento MN coincide con la funzione che compare a secondo membro dell'equazione (5.2)′, cioè

$$\mathrm{U}(x, 0) = \mathrm{A} + \mathrm{B}x \qquad 0 \leq x \leq 2a. \tag{5.6}$$

Detta $\mathrm{V}(x, y)$ la funzione armonica coniugata di $\mathrm{U}(x, y)$ individuata a meno di una costante additiva dalle equazioni di Cauchy–Riemann, la determinazione della funzione $\mathrm{U}(x, y)$ può sostituirsi con la determinazione, nel piano complesso $x + iy$ privato del segmento MN, di una funzione analitica $\mathrm{W}(z) \equiv \mathrm{U}(x, y) + i\,\mathrm{V}(x, y)$ ovunque regolare al finito, che all'infinito si comporti come la funzione $P \log \frac{1}{z}$ e che sui due lembi del segmento MN soddisfi con la sua parte reale la relazione (5.6).

Per individuare la funzione $\mathrm{W}(z)$ si utilizza il metodo della rappresentazione conforme. Introdotta la nuova variabile complessa $\zeta \equiv \xi + i\eta \equiv \rho e^{i\theta}$, si esegue la trasformazione

$$x - a = \frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\theta \qquad y = \frac{a}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\theta \tag{5.7}$$

che trasforma il piano $\mathrm{M}xy$, privato del segmento MN, nel cerchio Γ del piano complesso $\Omega\xi\eta$ che ha centro in Ω e raggio unitario. In tale trasformazione Ω corrisponde al punto all'infinito del piano $\mathrm{M}xy$, la frontiera di Γ corrisponde ai due lembi del segmento MN, e i due raggi di Γ sovrapposti all'asse ξ $(\rho \leq 1, \theta = \pi, \rho \leq 1, \theta = 0)$ corrispondono ordinatamente alle due semirette dell'asse x $(-\infty, 0), (2a, +\infty)$.

Ciò posto, subordinatamente alla condizione

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}a + P \log \frac{a}{2} = 0 \tag{5.8}$$

che garantisce alla funzione trasformata $\overline{\mathrm{W}}(\zeta) \equiv \mathrm{W}(z)$ di avere in Ω il comportamento della funzione $P \log 2\zeta/a$ richiesto dalla condizione 2), si perviene alla formola

$$\mathrm{U}(x, y) \equiv \overline{\mathrm{U}}(\rho, \theta) = \mathrm{B}a\rho\cos\theta + \mathrm{P}\log 2\rho/a. \tag{5.9}$$

Si tenga ora presente il legame che esiste fra densità di massa attraente $p(x)$ e potenziale logaritmico $\mathrm{U}(x, y)$ di semplice strato:

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad 0 \leq x \leq 2a. \tag{5.10}$$

Effettuata sulla funzione (5.9), per il tramite di ρ e θ, l'operazione indicata a secondo membro di (5.10) e posto poi $\rho = 1$, si perviene alle formole risolutive [(7)]

$$(5.11) \qquad p(x) = \frac{2\left(\frac{x_c}{a} - 1\right)x - 2x_c + 3a}{\pi\sqrt{a^3 x\left(2 - \frac{x}{a}\right)}}\, P \qquad 0 \leq x \leq 2a$$

$$(5.12) \qquad \gamma = \frac{2k}{E\pi} - \frac{2P}{E\pi}\left(\log\frac{a}{2} + \frac{2x_c}{a} - 2\right) \quad , \quad \alpha = \frac{4P}{E\pi a^2}(x_c - a)$$

nelle quali si è già tenuto conto delle (5.4), (5.8) e delle condizioni globali (2.7).

Viceversa le (5.11) e (5.12) soddisfano l'equazione integrale (5.2)'. Basta infatti tener conto delle formole $(5.4)_2$, $(5.7)_1$, (5.9) e $(5.12)_2$ per ottenere, lungo tutti i punti del segmento MN,

$$\frac{E\pi}{2}\left[u_2(x, 0) - (\gamma + \alpha x)\right] = \left[\frac{2P}{a}\rho(x_c - a)\cos\theta + \right.$$
$$\left. + P\log\frac{2\rho}{a} - P\log\frac{2}{a} - \frac{P}{a}(x_c - a)\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\theta\right]_{\rho=1} = 0.$$

La (5.11) dà dunque la distribuzione delle pressioni lungo la sbarra; le (5.12) legano lo spostamento traslatorio γ della sbarra e la sua inclinazione α alla forza di compressione totale P e alla sua eccentricità x_c. Secondo la (5.11) la pressione $p(x)$ risulta una funzione regolare in tutti i punti interni all'intervallo $(0, 2a)$ soddisfacente a tutte le ipotesi per essa ammesse al paragrafo 3. Perché il risultato sia compatibile con l'unilateralità del vincolo, ossia perché la $p(x)$ soddisfi la condizione $(2.5)_2$ con $\lambda = a$, occorre e basta che l'ascissa del centro di pressione verifichi la limitazione

$$(5.13) \qquad \frac{a}{2} \leq x_c \leq \frac{3a}{2}.$$

Per x_c interno al suddetto intervallo $(a/2, 3a/2)$ la $p(x)$ presenta due punti di infinito negli estremi M, N.

Se invece C coincide con un estremo dell'intervallo (5.13) (per esempio $x_c = a/2$), la $p(x)$ diventa infinita nell'estremo più vicino della sbarra $(x = 0)$, mentre si annulla nell'altro estremo $(x = 2a)$.

Pertanto la circostanza che il contatto abbia effettivamente luogo lungo tutta la sbarra è subordinata alla condizione che il centro di pressione C non sia esterno a un *nocciolo centrale* rappresentato dal segmento (5.13) il cui punto medio coincide col punto medio della sbarra, e di lunghezza metà. Accettata l'ipotesi (5.13) e assunta per $p(x)$ l'espressione (5.11), si è ricono-

(7) Per più ampi dettagli cfr. C. CATTANEO, Note citate in (6). In esse i calcoli sono svolti in un sistema di assi coordinati paralleli a quelli scelti nel presente lavoro, e con origine nel punto medio del segmento MN. Le formole dedotte risultano così particolarmente semplici. Il motivo della scelta attuale sta nel fatto che, rimanendo essa invariata al variare della posizione x_c del carico P, la legge di distribuzione delle pressioni viene ad assumere direttamente la forma più espressiva per la risoluzione del presente problema.

sciuto in tal modo che lo stress definito dalle (3.1) soddisfa tutte le condizioni elencate nel paragrafo 2.

Si è così determinata, subordinatamente all'ipotesi (5.13), una soluzione esplicita del problema formulato nel paragrafo 2. Essa è data dalle formule (3.1), (4.6), (5.11) e (5.12) che si raccolgono qui insieme, a conclusione della presente Nota:

$$
(5.14)\quad \begin{cases}
p(x) = \dfrac{2\left(\dfrac{x_c}{a} - 1\right) - 2x_c + 3a}{\pi\sqrt{a^3 x\left(2 - \dfrac{x}{a}\right)}}\, P \qquad\qquad 0 \leq x \leq 2a \\[2ex]
X_{11}(x, y) = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \dfrac{(x-\bar{x})^2 y}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}\, p(\bar{x})\, d\bar{x} \\[2ex]
X_{12}(x, y) = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \dfrac{(x-\bar{x})\, y^2}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}\, p(\bar{x})\, d\bar{x} \\[2ex]
X_{22}(x, y) = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \dfrac{y^3}{[(x-\bar{x})^2 + y^2]^2}\, p(\bar{x})\, d\bar{x} \\[2ex]
u_1(x, y) = -\dfrac{1}{E\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \left\{(1-\nu)\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-\bar{x}}{y}\right) - \dfrac{(1+\nu)(x-\bar{x})\, y}{(x-\bar{x})^2 + y^2}\right\} p(\bar{x})\, d\bar{x} \\[2ex]
u_2(x, y) = -\dfrac{2}{E\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \left\{\log[(x-\bar{x})^2 + y^2]^{1/2} + \dfrac{(1+\nu)(x-\bar{x})^2}{2[(x-\bar{x})^2 + y^2]}\right\} \cdot \\
\qquad\qquad \cdot\, p(\bar{x})\, d\bar{x} + \dfrac{2}{E\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \log|b - x|\, p(x)\, dx + \dfrac{(1+\nu)P}{E\pi} \\[2ex]
\gamma = \dfrac{2}{E\pi}\displaystyle\int_0^{2a} \log|b - x|\, p(x)\, dx - \dfrac{2P}{E\pi}\left(\log\dfrac{a}{2} + \dfrac{2x_c}{a} - 2\right) \\[2ex]
\alpha = \dfrac{4P}{E\pi a^2}(x_c - a).
\end{cases}
$$

Rimane naturalmente da esaminare se quella trovata sia anche l'unica soluzione del problema. La questione, molto importante da un punto di vista matematico, sembra presentare notevoli difficoltà a causa del comportamento asintotico dello stress e dello spostamento. Essa costituirà oggetto di una ulteriore ricerca.

Intanto, in una prossima Nota si completerà la presente indagine, esaminando il caso che il centro C di pressione sia esterno al nocciolo ($a/2$, $3a/2$) e che quindi abbia luogo un parziale distacco della sbarra dal suo appoggio. Come si vedrà, anche in questo caso sarà data una soluzione esplicita del problema.