ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

DEMETRIO MANGERON, MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI, LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN, FRANCESCO SAVERIO ROSSI

Calcolo con calcolatrici elettroniche delle funzioni speciali spettanti ai sistemi polivibranti e polivibranti generalizzati ed applicazioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.2, p. 160–169.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_2_160_0>

Analisi matematica. — *Calcolo con calcolatrici elettroniche delle funzioni speciali spettanti ai sistemi polivibranti e polivibranti generalizzati ed applicazioni* [1]. Nota I di DEMETRIO MANGERON [2], [3], MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI [4], LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN [5] e FRANCESCO SAVERIO ROSSI [6], presentata [*] dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — This is the first attempt to elaborate a unified theory of special functions of several variables and to construct some new tables using computers. In the present Note various classes of special functions and polynomials, orthogonal or not in a certain domain, using the authors' *polyvibrating systems* approach are given and some of related theorems are exposed.

1. Si deve all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone il merito di aver data una poderosa spinta all'uso delle calcolatrici elettroniche ed in particolar modo al loro proficuo impiego, per il progresso della scienza e della tecnica odierne, nell'ambito dell'I.N.A.C., da Lui ideato e fondato [1], [2].

Gli AA., dopo aver recentissimamente utilizzato le calcolatrici elettroniche nella programmazione del controllo di certe macchine utensili [3], si propongono di esporre in una serie di Note elaborate per questi *Rendiconti* vari risultati concernenti il calcolo con calcolatrici elettroniche delle funzioni speciali spettanti ai sistemi polivibranti e polivibranti generalizzati, risalendo poscia, grazie all'analisi delle soluzioni di certi sistemi funzionali (differenziali o alle derivate parziali ed a differenze finite) all'esposizione di una *teoria unitaria delle funzioni speciali in qualunque numero di variabili indipendenti.*

Un'altra serie di Note, che costituisce l'estensione naturale dei nostri studi concernenti i *sistemi polivibranti o alle derivate totali di Picone* [4]–[8], è dedicata a vari problemi relativi all'esistenza, l'unicità, l'analisi spettrale, l'approssimazione e la valutazione degli errori commessi spettanti alle funzioni appartenenti a diversi spazi funzionali, gli sviluppi in serie di funzioni caratteristiche corrispondenti ai *sistemi polivibranti generalizzati*, la programmazione dinamica ed applicazioni di poderosi procedimenti odierni variazionali,

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1970.

(1) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada by Grant NRC–A4345 through the University of Alberta.

(2) Istituto Politecnico di Iași, Repubblica Socialista di Romania. In presente "Visiting Professor", University of Alberta, Department of Mathematics, Edmonton, Alberta, Canada.

(3) The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

(4) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

(5) Università degli Studi della Repubblica Socialista Sovietica Kirghisia, Frunze, URSS.

(6) Ministero della Pubblica Istruzione, Roma.

dovuti soprattutto in un'ammirevole generalità a M. Picone [9], [10], spettanti ai detti sistemi, differenziali ed integro-differenziali, lineari o no, contenenti o no argomenti ritardati oppure operatori alle differenze finite, *in qualunque numero di variabili indipendenti*, di cui il *prototipo* è dato estendendo in un apposito modo il sistema di Sturm-Liouville, esaurientemente studiato nella oramai classica Tesi di abilitazione di Picone [11], [12], e cioè:

$$(1)\qquad [A(x)\,u'(x) + \lambda B(x)\,u(x)]' + \lambda\,[B(x)\,u'(x) + C(x)\,u(x)] = 0\,,$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \quad , \quad R\{x \mid a_j \le x_j \le b_j\,;\, j = 1, 2, \cdots, m\}\,,$$

$$(2)\qquad \left(u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \cdots = \frac{\partial^{n_j - 1} u(x)}{\partial x_j^{n_j - 1}}\right)_{x_j = a_j ; b_j} = 0\,,$$

$$(3)\qquad u'(x) = \frac{\partial^{n_1 + n_2 + \cdots + n_m} u(x)}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2} \cdots \partial x_m^{n_m}}\,.$$

La *novità* nello studio dei sistemi polivibranti generalizzati consiste nel fatto che il dominio « rettangolare » $R\{a_j \le x_j \le b_j\}$ è a m dimensioni (7), il simbolo $'$ denota la derivata polivibrante generalizzata (3) che si riduce a sua volta, per $n_j = 1$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$, alla derivata prima totale di Picone ed i modelli matematici variazionali corrispondenti contengono per la prima volta, come lo fu già nel caso di sistemi polivibranti, operatori differenziali d'ordine qualsivoglia (8).

In ciò che segue enunceremo, prendendo le mosse da alcuni sistemi polivibranti generalizzati, una prima serie di teoremi concernenti varie classi di funzioni speciali e ne dedurremo certi risultati relativi ai polinomi polivibranti generalizzati ed ai polinomi polivibranti ortogonali in domini prescelti. Additeremo, in fine, alcune congetture concernenti le funzioni speciali.

2. A proposito di alcune forme speciali di equazioni polivibranti generalizzate del tipo di Sturm–Liouville hanno luogo i seguenti teoremi:

TEOREMA I. – *L'insieme di soluzioni dell'equazione polivibrante generalizzata*

$$(4)\qquad (e\theta^{*2} + f\theta^* + g)\,u_n''(x) + (\varepsilon\theta^* + \gamma)\,u_n'(x) =$$

$$\prod_{j=1}^{m} (nn_j \cdots ((n-1)\,n_j + 1)) \left[e \prod_{j=1}^{m} ((n-1)\,n_j \cdots ((n-2)\,n_j + 1)) + \varepsilon\right] u_n(x)$$

(7) Vari problemi al contorno ben posti concernenti sistemi polivibranti generalizzati non richiedono necessariamente – come, lo abbiamo dimostrato a suo tempo per i sistemi polivibranti – che il contorno sia costituito da caratteristiche.

(8) In una serie di recentissimi lavori dovuti all'Accademco Statunitense Garrett Birkhoff [13], [14] ed al prof. Gugliemo J. Gordon [15], [16] della General Motors Corporation, basati su alcuni dei nostri risultati concernenti i sistemi polivibranti o sistemi alle derivate totali di Picone, pubblicati in questi « Rendiconti » [17], [18], [19], si sottolinea ben giustamente il fatto che « there seems to have been no English language account of the important results of these European mathematicians » [15, p. 236].

contiene soluzioni polinomiali in variabile composta $\theta^* = \prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j}$ *di qualunque grado* $n\ (n = 1, 2, \cdots)$, *essendo* $n_j\ (j = 1, 2, \cdots, m)$ *numeri naturali.*

TEOREMA II. – *Le soluzioni polinomiali di qualunque grado* $n\ (n = 1, 2, \cdots)$ *in variabile composta* $\theta^* = \prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j}$ *dell'equazione polivibrante generalizzata* (4) *di cui sopra possono costituire una catena polinomiale oppure – ciò che è lo stesso – un sistema ortogonale di polinomi in un certo dominio a m dimensioni se ne ha luogo l'ineguaglianza*

$$\varepsilon\left[\prod_{j=1}^{m}(nn_j\cdots((n-1)\,n_j+1))-\prod_{j=1}^{m}(nn_j^*\cdots((n-1)\,n_j^*+1))\right]\neq \tag{5}$$

$$-\left[\prod_{j=1}^{m}(nn_j\cdots((n-2)\,n_j+1))-\prod_{j-1}^{m}(nn_j^*\cdots((n-2)\,n_j^*+1))\right]e\,,$$

$$n^* = 0, 1, 2, \cdots.$$

TEOREMA III. – *Le soluzioni polinomiali ortogonali di qualunque grado* $n\ (n = 1, 2, \cdots)$ *in variabile composta* $\theta^* = \prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j}$ *spettanti ad un certo dominio «rettangolare» a m dimensioni dell'equazione polivibrante generalizzata*

$$\mathrm{P}(x)\,u_n''(x) + \mathrm{Q}(x)\,u_n'(x) + [\mathrm{R}(x) - \lambda_n]\,u_n(x) = 0\,, \tag{6}$$

$$x = x_1, x_2, \cdots, x_m\,,$$

ove $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$, $\mathrm{R}(x)$ *sono pur essi polinomi in* θ^*, *corrispondono ai valori del parametro*

$$\lambda_n=\prod_{j=1}^{m}(nn_j\cdots((n-1)\,n_j+1))\left[e\prod_{j=1}^{m}((n-1)\,n_j\cdots((n-2)\,n_j+1))+\varepsilon\right] \tag{7}$$

diversi tra di loro.

3. Siano

$$\theta^*(1-\theta^*)\,u''(x) + [c-(a+b+1)\,\theta^*]\,u'(x) - abu(x) = 0, \tag{8}$$

$$\theta^{*2}\,u''(x) + \theta^*\,u'(x) + [\theta^{*2} - \nu^{2(n_1+n_2+\cdots+n_m)}]\,u(x) = 0, \tag{9}$$

$$(1-\theta^{*2})\,u''(x) - 2^{n_1+n_2+\cdots+n_m}\,u'(x) + \lambda u(x) = 0, \tag{10}$$

$$(1-\theta^{*2})\,u''(x) - \theta^*\,u'(x) + k_n^{*2}\,u(x) = 0, \tag{11}$$

$$\theta^* = \prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j}\quad,\quad x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)\quad,\quad u' = \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_m}u}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2}\cdots\partial x_m^{n_m}}$$

le equazioni polivibranti generalizzate che possono considerarsi estensioni ad un qualsiasi numero di variabili indipendenti delle classiche equazioni di Gauss–Jacobi (ipergeometriche), Bessel, Legendre e Tchebycheff.

Le funzioni di cui sotto sono, rispettivamente, soluzioni di (8)–(11):

$$\left\{\begin{aligned}
&a^{-1}_{0;(n_j)}\,F_{(n_j)}(a\,,b\,;c\,;\theta^*) = 1 + \frac{ab}{c\prod\limits_{j=1}^{m} n_j!}\,\theta^* + \cdots + \frac{ab}{c\prod\limits_{j=1}^{m} n_j!}\;\cdot\\
&\cdot\frac{ab+(a+b+1)\prod\limits_{j=1}^{m} n_j!}{c\prod\limits_{j=1}^{m}(2n_j\cdots(n_j+1))+\prod\limits_{j=1}^{m}(2n_j)!}\;\frac{ab+(a+b+1)\prod\limits_{j=1}^{m}(2n_j\cdots(n_j+1))+\prod\limits_{j=1}^{m}(2n_j)!}{c\prod\limits_{j=1}^{m}(3n_j\cdots(2n_j+1))+\prod\limits_{j=1}^{m}(3n_j\cdots(n_j+1))}\cdots\\
&\frac{ab+(a+b+1)\prod\limits_{j=1}^{m}((p-1)n_j\cdots((p-2)n_j+1))+\prod\limits_{j=1}^{m}((p-1)n_j\cdots((p-3)n_j+1))}{c\prod\limits_{j=1}^{m}(pn_j\cdots((p-1)n_j+1))+\prod\limits_{j=1}^{m}(pn_j\cdots((p-2)n_j+1))}\,\theta^{*p}+\cdots,
\end{aligned}\right.\tag{12}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\theta^{*-k}\,J_{k;(n_j)}(\theta^*) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\;\cdot\\
&\cdot\frac{\theta^{*2p}}{\prod\limits_{i=1}^{p}\left\{\prod\limits_{j=1}^{m}((2i+1)n_j\cdots(2in_j+1))\left[\prod\limits_{j=1}^{m}(2in_j\cdots((2i-1)n_j+1))+1\right]-\nu_k^{2\sum_1^m n_j}\right\}}\\
&\nu_k^{2\sum_1^m n_j} = \prod_{j=1}^{m}(kn_j\cdots((k-2)n_j+1))+\prod_{j=1}^{m}(kn_j\cdots((k-1)n_j+1)),
\end{aligned}\right.\tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&a^{-1}_{0,2k;(n_j)}\,P_{2k;(n_j)}(\theta^*) =\\
&\sum_{p=0}^{k}\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}\prod\limits_{j=1}^{m}((2k-2i+2)n_j\cdots((2k-2i)n_j+1))\,\theta^{*2k-2p}}{\prod\limits_{i=1}^{p}\left\{\prod\limits_{j=1}^{m}((2k-2i)n_j\cdots((2k-2i-1)n_j+1))\cdot\left[\prod\limits_{j=1}^{m}((2k-2i-1)n_j\cdots((2k-2i-2)n_j+1))+2^{\sum_1^m n_j}\right]-\lambda\right\}},\\
&\lambda \equiv \lambda_{2k;n_1+n_2+\cdots+n_m} =\\
&\prod_{j=1}^{m}(2kn_j\cdots((2k-1)n_j+1))\left[\prod_{j=1}^{m}((2k-1)n_j\cdots((2k-2)n_j+1))+2^{\sum_1^m n_j}\right],
\end{aligned}\right.\tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&T_{n;(n_j)}(\theta^*) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,n-i;(n_j)}\,\theta^{*i}, \qquad n_j = (n_1\,,n_2\,,\cdots,n_m)\,,\\
&a_{r,n-r;(n_j)} =\\
&= \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}((n-r+2)n_j\cdots((n-r)n_j+1))\,a_{r-2,n-r+2;(n_j)}}{\prod\limits_{j=1}^{m}((n-r)n_j\cdots((n-r-2)n_j+1))+\prod\limits_{j=1}^{m}((n-r)n_j\cdots((n-r-1)n_j+1))-k_n^{*2}},\\
&k_n^{*2} = \prod_{j=1}^{m}(nn_j\cdots((n-2)n_j+1))+\prod_{j=1}^{m}(nn_j\cdots((n-1)n_j+1)).
\end{aligned}\right.\tag{15}$$

Rimandando il lettore ai prossimi fascicoli del *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași* per le espressioni di varie classi di nuove funzioni polivibranti generalizzate, per i dati concreti concernenti gli zeri $\theta^* = \prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j} = \text{cost.}$, tutti reali, delle successioni polinomiali determinati, per varie formule di maggiorazione, ad esempio per le estensioni di polinomi di Legendre [20], [21] ed altri ancora, ci permettiamo di estendere costì per diverse classi di polinomi e di funzioni dipendenti esclusivamente dal prodotto $\theta^* = \prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j}$ ed ottenuti nell'ordine di idee di qui sopra la *congettura* enunciata nella nostra Nota recente inserita nei *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, relativa a simili funzioni e polinomi dipendenti esclusivamente dal prodotto $\theta = \prod_{j=1}^{m} x_j$ [31] e pendenti dai sistemi polivibranti ossia con derivata totale di Picone.

4. Passiamo ora alla costruzione delle successioni di polinomi ortogonali generalizzati $P^*_{n;(n_j)}(\theta^*) = \sum_{k=1}^{n+1} \overset{*}{a}_{k-1,n;(n_j)} \left(\prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j}\right)^{n-(k-1)}$ scegliendo per dominio d'ortogonalità l'ipercubo $R^*\{-1 \leq x_j \leq +1, j = 1, 2, \cdots, m\}$ e per funzione peso l'unità.

a) Nel caso in cui numeri naturali n_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ figuranti nell'espressione della derivata prima polivibrante generalizzata sono *pari*, tali polinomi, normalizzati tramite la condizione $\sum_{1}^{n+1} \overset{*}{a}_{k-1,n;(n_j)} = 1$, si presentano sotto la forma che segue:

$$
(16) \qquad \overset{*}{\Delta}_{n+1;(n_j)} \sum_{k=1}^{n+1} \overset{*}{a}_{k-1,n;(n_j)}\, \theta^{*\,n-(k-1)} =
$$

$$
= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ((n-k+i)\, n_j + 1)\, \overset{*}{A}_{ik,n+1;(n_j)}\, \theta^{*\,n-(k-1)},
$$

avendo il determinante d'ordine $n+1$, $\overset{*}{\Delta}_{n+1;(n_j)}$, tutti gli elementi della prima linea uguali all'uno e l'elemento generico appartenente alla linea i–ma ed alla colonna k–ma sotto la forma

$$
\prod_{j=1}^{m} ((n+i-2)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k)\, n_j + 1) \cdot
$$

$$
\cdot \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k-2)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((i-2)\, n_j + 1),
$$

mentre il determinante minore d'ordine n, $\overset{*}{A}_{ik,n+1;(n_j)}$, ha gli elementi $\overset{*}{\alpha}_{i1,n+1}, \cdots, \overset{*}{\alpha}_{ik-1,n+1}, \overset{*}{\alpha}_{ik+1,n+1}, \cdots, \overset{*}{\alpha}_{in+1,n+1}$ della linea i–ma dati tramite i seguenti prodotti

$$\alpha^*_{i1,n+1} = \prod_{j=1}^{m} ((n+i-3)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k)\, n_j + 1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k-2)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((i-2)\, n_j + 1),$$

$$\cdots$$

$$\alpha^*_{ik-1,n+1} = \prod_{j=1}^{m} ((n+i-2)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k+1)\, n_j + 1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k-2)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((i-2)\, n_j + 1),$$

$$\cdots$$

$$\alpha^*_{ik+1,n+1} = \prod_{j=1}^{m} ((n+i-2)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k)\, n_j + 1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k-3)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((i-2)\, n_j + 1),$$

$$\cdots$$

$$\alpha^*_{in+1,n+1} = \prod_{j=1}^{m} ((n+i-2)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k)\, n_j + 1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{m} ((n+i-k-2)\, n_j + 1) \cdots \prod_{j=1}^{m} ((i-1)\, n_j + 1).$$

b) Nel caso in cui n_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ sono *dispari*, le espressioni dei polinomi $P^*_{2n;(n_j)}(\theta^*) = \sum_{l=0}^{n} a^*_{2l,2n;(n_j)}\, \theta^{*2n-2l}$ e $P^*_{2n+1;(n_j)}(\theta^*) = \sum_{l=0}^{n} a^*_{2l,2n+1;(n_j)} \cdot$ $\cdot\, \theta^{*2n+1-2l}$, normalizzati rispettivamente tramite le condizioni $\sum_{l=0}^{n} a^*_{2l,2n;(n_j)} = 1$ e $\sum_{l=0}^{n} a^*_{2l,2n+1;(n_j)} = 1$, ortogonali nel medesimo ipercubo R^* di cui sopra, essendovi funzione peso uguale all'unità, si presentano sotto la forma seguente

$$\Delta^*_{2n;(n_j)}\, P^*_{2n;(n_j)}(\theta^*) = \tag{17}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \prod_{i=2}^{n+1} \prod_{j=1}^{m} ((2n - 2k + 2(i-2))\, n_j + 1)\, A^*_{ik,2n;(n_j)}\, \theta^{*2n-2k},$$

$$\Delta^*_{2n+1;(n_j)}\, P^*_{2n+1;(n_j)}(\theta^*) = \tag{18}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \prod_{i=2}^{n+1} \prod_{j=1}^{m} ((2n - 2k + 2(i-1))\, n_j + 1)\, A^*_{ik,2n+1;(n_j)}\, \theta^{*2n+1-2k},$$

ove gli elementi $\alpha^*_{i1,2n}, \cdots, \alpha^*_{ik,2n}, \alpha^*_{ik+2,2n}, \cdots, \alpha^*_{in+1,2n}$ e $\alpha^*_{i1,2n+1}, \cdots, \alpha^*_{ik,2n+1}$, $\alpha^*_{ik+2,2n+1}, \cdots, \alpha^*_{in+1,2n+1}$ dei determinanti minori a n linee e n colonne

$A^*_{ik,2n;(n_j)}$ e $A^*_{ik,2n+1;(n_j)}$ sono dati rispettivamente:

$$(19)\quad \begin{cases} \alpha^*_{i1,2n} = \prod_{j=1}^{m} ((2n+2(i-3))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2(i-1))n_j+1)\cdot \\ \qquad \cdot\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2(i-3))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}(2(i-2)n_j+1), \\ \qquad\qquad \cdots \\ \alpha^*_{ik,2n} = \prod_{j=1}^{m} ((2n+2(i-2))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}((2n+2(i-k))n_j+1)\cdot \\ \qquad \cdot\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2(i-3))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}(2(i-2)n_j+1), \\ \alpha^*_{ik+2,2n} = \prod_{j=1}^{m} (2n+2(i-2)n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2(i-1))n_j+1)\cdot \\ \qquad \cdot\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2(i-4))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}(2(i-2)n_j+1), \\ \qquad\qquad \cdots \\ \alpha^*_{in+1,2n} = \prod_{j=1}^{m} ((2n+2)n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2(i-1))n_j+1)\cdot \\ \qquad \cdot\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2(i-3))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}(2(i-1)n_j+1); \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \alpha^*_{i1,2n+1} = \prod_{j=1}^{m} ((2n+2(i-2))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2i)n_j+1)\cdot \\ \qquad \cdot\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2i-4)n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}(2(i-1)n_j+1), \\ \qquad\qquad \cdots \\ \alpha^*_{ik,2n+1} = \prod_{j=1}^{m} ((2n+2(i-1))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2(i+1))n_j+1)\cdot \\ \qquad \cdot\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2i-4)n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}(2(i-1)n_j+1), \\ \alpha^*_{ik+2,2n+1} = \prod_{j=1}^{m} ((2n+2(i-1))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2i)n_j+1)\cdot \\ \qquad \cdot\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2i-6)n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}(2(i-1)n_j+1), \\ \qquad\qquad \cdots \\ \alpha^*_{in+1,2n+1} = \prod_{j=1}^{m} ((2n+2(i-1))n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2i)n_j+1)\cdot \\ \qquad \cdot\prod_{j=1}^{m}((2n-2k+2i-4)n_j+1)\cdots\prod_{j=1}^{m}(2in_j+1). \end{cases}$$

In questo ultimo caso hanno luogo i teoremi seguenti:

TEOREMA IV. – *Le ipersuperfici* $\theta^* = \prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j} = \text{cost}$ *che corrispondono gli zeri dei polinomi* $P^*_{2n;(n_j)}(\theta^*)$ *e* $P^*_{2n+1;(n_j)}(\theta^*)$ *si separano reciprocamente e suddividono il dominio «rettangolare»* $R\{\alpha_j \leq x_j \leq b_j \,;\, j = 1, 2, \cdots, m\}$ *in* $n + 1$ *domini parziali.*

TEOREMA V. – *I sistemi di polinomi ortogonali di cui sopra soddisfano una relazione di ricorrenza lineare collegante tre polinomi di gradi successivi* (estensione per i sistemi polivibranti del teorema di Szegö).

5. *Osservazioni.* 1) In alcune delle nostre Note di prossima pubblicazione additeremo la possibilità di utilizzare con profitto queste nostre ricerche nei problemi concernenti la teoria dell'approssimazione delle funzioni di variabili reali tramite le «spline» funzioni, introdotte dall'I. J. Schoenberg [22] e largamente trattate negli ultimi due decenni. Infatti, le proprietà delle funzioni sopraddette, ad esempio della «spline» funzione d'interpolazione del tipo II′ [23] contengono tra l'altro la minimizzazione del funzionale $\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \left\{ \frac{\partial^4 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \, \partial x_2^2} \right\}^2 dx_1 \, dx_2$ che rappresenta un particolarissimo caso dei problemi variazionali, trattati nei diversi spazi funzionali e concernenti i sistemi polivibranti e polivibranti generalizzati, trovatisi nelle nostre pubblicazioni sin dal 1932 [24].

2) In un'altra serie di Note daremo alcuni dettagli, tenendo presente una bella ricerca dell'Accademico Statunitense C. Truesdell [25] concernente funzioni speciali in una sola variabile indipendente, spettanti all'elaborazione di una teoria unitaria delle funzioni speciali in un numero qualunque di variabili indipendenti, prendendo le mosse dallo studio delle soluzioni di certe equazioni funzionali (differenziali o alle derivate parziali ed alla differenze finite), tale, ad esempio, l'equazione

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} &DF(x_1, x_2, \cdots, x_m; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \\ &= F(x_1, x_2, \cdots, x_m; \alpha_1 + A_{1D}, \cdots, \alpha_m + A_{mD}), \end{aligned}$$

ove $\alpha_j \, (j = 1, 2, \cdots, m)$ sono parametri e $A_{jD} \, (j = 1, 2, \cdots, m)$ numeri dipendenti dall'operatore differenziale D oppure soltanto dall'insieme n_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ ove si tratti di operatori polivibranti, ovvero dallo studio delle soluzioni di certi sistemi funzionali, come lo è, ad esempio il sistema

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^{n_1}}{\partial_1 x^{n_1}} F(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2) = F(x_1, x_2; \alpha_1 + n_1, \alpha_2), \\[2ex] \dfrac{\partial^{n_2}}{\partial x_2^{n_2}} F(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2) = F(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2 + n_2), \end{cases}$$

corrispondente al caso in cui l'operatore $D \equiv \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}}$ e *riducibile* nel senso di Picone [26], [27].

3) Sarebbe interessante esaminare eventuali estensioni al campo degli operatori polivibranti di recenti risultati conseguiti nello studio generale dei polinomi in una sola variabile o dei polinomi di Tchebycheff [28], [29], [30].

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE I.N.A.C., *L'inaugurazione della calcolatrice elettronica.* « La Ricerca Scientifica », *26*, 1 (1956).

[2] M. PICONE, *L'Annuario dell' Accademia Nazionale dei XL*, Roma (1968), 1–29.

[3] D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI e N. ORLANDEA, *An Algorithm for producing circular and linear envelope Curves in plane Mechanisms consisting of complex kinematic Chains with Applications in Digital Control of Machines Tools.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª (in stampa).

[4] D. MANGERON, *Introduzione allo studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *39*, 1–2, 22–28 (1965).

[5] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Estensione dei metodi di maggiorazione di Picone alle soluzioni di sistemi di equazioni polivibranti.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *44*, 5, 625–632 (1968).

[6] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN, *New methods of numerical calculation for the solutions of polyvibrating systems.* « Romanian Journal of Appl. Mechanics », *9*, 6, 1195–1121 (1964).

[7] D. MANGERON, *Problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple.* « Giorn. di Mat. », s. 3ª, *71*, 89–139 (1933).

[8] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Programmazione dei calcoli con calcolatrici elettroniche per le soluzioni di una classe di sistemi polivibranti.* – I. *Determinazione delle funzioni di Green spettanti ai problemi al contorno polivibranti.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *44*, 6, 713–719 (1968).

[9] M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti.* « Memorie della Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat., Accad. Naz. dei Lincei », s. 8ª, *7*, 3 (1963).

[10] D. MANGERON, *Dynamic Programming concerning a set of Polyvibrating Systems.* « J. Mat. Anal. a. Appl. », *9*, 1, 141–145 (1964).

[11] M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine.* « Ann. R. Sc. Norm. Sup. Pisa », *11* (1909).

[12] M. BÔCHER, *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations differentielles linéaires et leurs développements modernes.* Paris, Gauthier-Villars 1917.

[13] G. BIRKHOFF, *Piecewise Bicubic Interpolation and Approximation in Polygons.* « Approximations with Special Emphasis on Spline Functions ». Ed. by. I. J. Schoenberg, Academic Press, New York and London, 185–221 (1961). Vedasi in particolare, pp. 209 sgg.

[14] G. BIRKHOFF e W. GORDON, *The Draftsman's and Related Equations.* « J. Approx. Th. », *1*, 199–208 (1968).

[15] W. J. GORDON, *Distributive Lattices and the Approximation of Multivariate Functions.* « Approximations with Special Emphasis on Spline Functions », ed. by I. J. Schoenberg, Academic Press, New York and London, 223–277 (1969). Vedasi in particolare, pp. 236 sgg.

[16] W. J. GORDON, *Bleding-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation.* « SIAM J. on Numer. Anal. » (in stampa).

[17] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica Matematica.* « Ann. Sci. Univ. Jassy », I. sez., *26*, I, 183–232 (1940).

[18] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno non omogenee per alcuni tipi di equazioni integro–differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *33*, 619–623 (1962).

[19] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Programmazione dinamica di una classe di equazioni polivibranti con certe condizioni al contorno.* « Rend. Ist. Lombardo di sci. e lettere », *102*, A, 250–256 (1968).

[20] M. PICONE, *Una semplicissima formola di maggiorazione per i polinomi di Legendre e per le loro derivate.* « Boll. Unione Mat. Ital. », s. 3ª, *8*, 1 (1953).

[21] F. S. ROSSI, *Alcune applicazioni di metodi di Mangeron concernenti certi sistemi non lineari polivibranti.* « Bull. Polytechn. Inst. Jassy », s.n., *9* (*13*), 3–4, 39–42 (1963).

[22] I. J. SCHOENBERG, *Monosplines and Quadrature Formulae.* « Theory and Applications of Spline Functions », Ed. by T.N.E. Greville, Academic Press, New York. London 1969, pp. 157–207.

[23] J. H. AHLBERG, E. N. NILSON e J. L. WALSH, *The Theory of Splines and Their Applications.* Academic Press, New York and London, 1967, p. 243.

[24] D. MANGERON, *Problemi al contorno per sistemi alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* « Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli », s. 4ª, *2*, 29–40 (1932).

[25] C. TRUESDELL, *On the addition and multiplication theorems for special functions.* « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », *36*, 752–755 (1950).

[26] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei., Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *31*, 1–2, 27–32 (1961). Dedicata a Mauro Picone nel Suo 75° compleanno.

[27] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN, *Valutazione dei moduli delle soluzioni dei problemi al contorno non lineari spettanti ai sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *39*, 1–2, 29–36 (1965). Dedicata a MAURO PICONE nel Suo 80° compleanno.

[28] J. R. RICE, *A theory of condition.* « SIAM J. Numer. Anal. », *3*, 287–310 (1966).

[29] J. LEGRAS, *Intérêt technique de la représentation d'un polynome dans une base de Tchebycheff.* « Mathematica, Cluj », *10* (33), 113–121 (1968).

[30] J. L. GUERONIMUS, *O kvadraturnoi formule Tchebycheff'a.* « Izv. Akad. Nauk SSSR s. Mat. », *33*, 5, 1182–1207 (1969).

[31] D. MANGERON, *Nouvelles classes de fonctions relatives aux équations polyvibrantes et l'extension de la conjecture de Lorch-Szegö concernant les propriétés de monotonie d'ordre supérieur de certaines fonctions de Sturm–Liouville.* « C. r. Acad. Sci. Paris », *266*, 976–978 (1968).