Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Nuova limitazione per gli autovalori di un parametro da cui dipende un'equazione lineare a derivate parziali, del second'ordine, di tipo ellittico-parabolico, in quante si vogliano variabili reali indipendenti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.2, p. 152–154.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_2_152_0>

Analisi matematica. — *Nuova limitazione per gli autovalori di un parametro da cui dipende un'equazione lineare a derivate parziali, del second'ordine, di tipo ellittico–parabolico, in quante si vogliano variabili reali indipendenti.* Nota (*) di MAURO PICONE.

SUMMARY. — The elliptic–parabolic 2nd order linear partial differential equation (1) is considered in a regular domain of the r–dimensional euclidean space. Both the parameters λ and ν, entering into the equation, are real. Bounds to the eigenvalues λ, as functions of ν, are obtained, under the boundary condition $u = 0$.

In una mia Nota, attualmente in corso di stampa negli *Annali di Matematica pura e applicata*, dal titolo: *Teoremi di confronto fra due equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine, di tipo ellittico–parabolico, in più variabili reali indipendenti e alcuni loro corollari*, pervengo al seguente teorema.

Nel dominio regolare T dello spazio euclideo a r dimensioni, il cui punto generico x, abbia le coordinate $x_1, x_2, \cdots, x_r$, siano definite le funzioni reali

$$a_{hk}(x) \equiv a_{kh}(x) \quad , \quad a_h(x) \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, r)$$

di classe 1 in T, e la funzione reale

$$a(x)$$

sommabile in T. Una funzione reale $u(x)$ è detta soluzione della equazione

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A}(u) \equiv \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_{k=1}^{r} a_{hk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + 2\nu \sum_{h=1}^{r} a_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + \lambda a(x)\, u = 0\,,$$

nella quale λ e ν designano due parametri reali, se essa è di classe 1 in T, di classe 2 nell'interno di T e $\mathrm{A}(u)$ riesce quasi ovunque nulla in T. Sia J l'intervallo di estremi inferiore α e superiore β, dell'asse x_1, descritto dalla coordinata x_1 del punto x, al variare di questo nel dominio T, e, supposta la funzione reale $b(x)$ continua e sempre positiva in T, si indichi con

$$\omega(x_2, x_3, \cdots, x_r)$$

la funzione delle $r - 1$ variabili $x_2, x_3, \cdots, x_r$, sempre positiva in T, minimo autovalore per le equazioni

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \omega b v = 0\,,$$

$$\text{(3)} \qquad v(\alpha, x_2, \cdots, x_r) = v(\beta, x_2, \cdots, x_r) = 0\,,$$

(*) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1970.

In tali ipotesi, se la forma quadratica nelle r variabili reali $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$,

$$\sum_{h=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} a_{hk}\,\xi_h\,\xi_k - \xi_1^2$$

si conserva in T, *sempre definita o semidefinita positiva e se per la funzione reale* $\mu(x_2, x_3, \cdots, x_r)$, *delle* $r - 1$ *variabili* $x_2, x_3, \cdots, x_r$, *si ha, ivi, sempre*

$$\mu(x_2, x_3, \cdots, x_r) < \omega(x_2, x_3, \cdots, x_r)$$

$$\lambda a(x) \leqq \mu b + \nu \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial a_h}{\partial x_h},$$

una soluzione della (1), *identicamente nulla in* ∂T *lo è in tutto* T, *cioè* λ *non è autovalore per le equazioni* (1) *e la*

(4) $$u(x) \equiv 0, \qquad \text{per} \quad x \subset \partial T.$$

Per $b(x) \equiv 1$, si ha:

$$\omega = \frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$$

donde i teoremi:

I. *Per i valori di* ν *per i quali riesce, in* T,

$$\frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2} + \nu \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial a_h}{\partial x_h} > 0,$$

λ *non è autovalore per le equazioni* (1) e (4), *se si ha, in* T,

$$|\lambda|\,|a| < \frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2} + \nu \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial a_h}{\partial x_h}.$$

II. *Se si assume* $\nu > 0$, *ed è sempre*, in T,

$$\sum_{h=1}^{r} \frac{\partial a_h}{\partial x_h} \geqq m > 0, \qquad |a(x)| \leqq M,$$

l'intervallo, dell'asse λ, *di estremi inferiore*

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2} + \nu m\right)$$

e superiore

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2} + \nu m\right)$$

è privo di autovalori, per il parametro λ, *relativi alle equazioni* (1) *e* (4).

Dunque, nelle ipotesi testè considerate, al tendere di ν all'infinito, gli autovalori di λ per le equazioni (1) e (4), sono respinti all'infinito.

Vale la pena di considerare il caso particolare $r = 1$, nel quale, indicata con x la variabile reale dell'intervallo (α , β) dell'asse x, sono, per esempio, soddisfatte le ipotesi del teorema II, dalle equazioni:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \nu a_1 (x) \frac{du}{dx} + \lambda a (x) u = 0 \tag{1'}$$

$$u (\alpha) = u (\beta) = 0 , \tag{4'}$$

essendo, nell'intervallo (α , β),

$$\frac{da_1}{dx} \geqq m > 0 , \qquad | a (x) | \leqq M .$$