Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gheorghe Gheorghiev, Margareta Ignat

Su alcuni moti intrinseci notevoli nella magnetoidrodinamica. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.1, p. 57–63.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_1_57_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Magnetoidrodinamica. — *Su alcuni moti intrinseci notevoli nella magnetoidrodinamica.* Nota I di GHEORGHE GHEORGHIEV e MARGARETA IGNAT, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In the present note a study is made of certain notable intrinsic magnetohydrodynamic motions of a perfect incompressible fluid, choosing as intrinsic reference the trihedron formed, at a given point, by the directions of the velocity and the magnetic field and by the direction perpendicular to them. In this system, making use of suitable Pfaffian forms, the fundamental equations of Magnetohydrodynamics are expressed, deducing various important geometrical properties of the movement and considering slow motions in particular.

1. *Riferimento mobile semiortogonale.*

Ci proponiamo di studiare le proprietà intrinseche di alcuni moti notevoli della magnetoidrodinamica. Si tratta dei moti lenti, elicoidali e quasi-rigidi. Nello studio della magnetoidrodinamica si impone l'adozione di riferimenti nei quali due campi di direzioni sono arbitrari, precisamente i versori del campo della velocità e del campo magnetico. Evidentemente la normale, la quale completa il riferimento, avrà un ruolo rilevante.

Sia $\Delta \subset E_3$ un dominio tridimensionale; a ciascun punto M di Δ si associano i versori $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ così che avranno luogo le relazioni:

$$(1) \qquad \mathbf{I}_i^2 = 1 \; (i = 1, 2, 3) \quad ; \quad \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{I}_3 = 0 \quad ; \quad \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = \cos\theta .$$

Si considera associato anche il triedro reciproco $\mathbf{I}^j$ determinato da:

$$(2) \qquad \mathbf{I}^1 \sin^2\theta = \mathbf{I}_1 - \cos\theta\, \mathbf{I}_2 \quad ; \quad \mathbf{I}^2 \sin^2\theta = \mathbf{I}_2 - \cos\theta\, \mathbf{I}_1 \quad ; \quad \mathbf{I}^3 = \mathbf{I}_3 ,$$

e si suppone che i versori introdotti siano campi regolari del punto M e di tempo t. I triedri reciproci $\mathbf{I}_k$ e $\mathbf{I}^j$ formano un riferimento mobile semiortogonale. In questo caso le equazioni del moto saranno:

$$(3) \qquad d\mathbf{M} = \omega^j \mathbf{I}_j \quad ; \quad d\mathbf{I}_k = \omega_{kj} \mathbf{I}^j \quad ; \quad d\mathbf{I}^k = \omega_j^k \mathbf{I}^j ,$$

dove $\omega^j(\mathrm{M}, d\mathrm{M})$, $\omega_j^k(\mathrm{M}, t\,;\, d\mathrm{M}, dt)$ e $\omega_{ij}(\mathrm{M}, t\,;\, d\mathrm{M}, dt)$ sono forme Pfaffiane regolari che verificano l'ineguaglianza:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge dt \neq 0$$

e le formule:

$$(4) \qquad \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \quad ; \quad d\cos\theta = \omega_{12} + \omega_{21} \; ;$$
$$0 = \omega_{13} + \omega_{31} \quad ; \quad \omega_{23} + \omega_{32} = 0 ,$$

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1970.

che risultano immediatamente da (1). Introducendo le annotazioni:

$$
(5)\qquad \begin{cases} p = \omega_{23} = p_i\,\omega^i + p_t\,\mathrm{d}t\,, \\ q = -\,\omega_{13} = q_i\,\omega^i + q_t\,\mathrm{d}t\,, \\ r = \omega_{12} = r_i\,\omega^i + r_t\,\mathrm{d}t\,, \\ r' = \omega_{21} = r'_i\,\omega^i + r'_t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\cos\theta - r\,, \end{cases}
$$

i pfaffiani ω_j^k dalla (3) si esprimono sotto la forma matriciale così:

$$
(6)\qquad [\omega_j^k] = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,r & -\dfrac{r}{\sin^2\theta} & q \\ -\dfrac{r'}{\sin^2\theta} & \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,r' & -p \\ -\dfrac{(q+p\cos\theta)}{\sin^2\theta} & \dfrac{q\cos\theta+p}{\sin^2\theta} & 0 \end{bmatrix}.
$$

Le equazioni di struttura dello spazio si deducono come al solito esprimendo le condizioni di completa integrabilità del sistema Pfaff (3). Esse saranno:

$$
(7)\qquad \begin{cases} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\omega^1 = \cos\theta\,r\wedge\omega^1 + r'\wedge\omega^2 - (q+p\cos\theta)\wedge\omega^3\,, \\ \sin^2\theta\,\mathrm{d}\omega^2 = (p+q\cos\theta)\wedge\omega^3 - r\wedge\omega^1 - \cos\theta\,r'\wedge\omega^2\,, \\ \mathrm{d}\omega^3 = q\wedge\omega^1 - p\wedge\omega^2 \end{cases}
$$

e

$$
(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{d}p = \dfrac{1}{\sin^2\theta}\,r'\wedge(q+p\cos\theta)\,, \\ \mathrm{d}q = \dfrac{1}{\sin^2\theta}\,(p+q\cos\theta)\wedge r\,, \\ \mathrm{d}r = \mathrm{d}r' = q\wedge p + \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,r'\wedge r\,. \end{cases}
$$

Introducendo (5) in queste ultime equazioni, otterremo le condizioni di integrabilità alle quali sono sottoposte le funzioni regolari $p_i, q_i, r_i, p_t, q_t, r_t$ $(i = 1, 2, 3)$.

2. *Gli operatori differenziali.*

L'operatore ∇ applicato ad una funzione scalare φ, oppure ad una vettoriale $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_j\,\mathbf{I}^j = \Lambda^k\,\mathbf{I}_k$ $(j, k = 1, 2, 3)$ ci fornirà, per mezzo del riferimento mobile semiortogonale, le formule seguenti:

$$
(9)\qquad \begin{cases} \operatorname{grad}\varphi = \dfrac{1}{\mathrm{d}\tau}\,(\mathbf{I}\wedge\mathrm{d}\varphi) \quad ; \quad \operatorname{div}\mathbf{\Lambda} = \dfrac{1}{\mathrm{d}\tau}\,(\mathbf{I}\wedge\mathrm{d}\mathbf{\Lambda})\,; \\ \operatorname{rot}\mathbf{\Lambda} = \dfrac{1}{\mathrm{d}\tau}\,[\mathbf{I}\wedge\mathrm{d}\mathbf{\Lambda}] \quad ; \quad (\mathbf{\Lambda}\cdot\nabla)\,\mu = \dfrac{1}{\mathrm{d}\tau}\,(\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{I}\wedge\mathrm{d}\mu)\,, \end{cases}
$$

dove:

$$
(10)\qquad \mathbf{I} = \mathbf{I}^1\,\omega^2\wedge\omega^3 + \mathbf{I}^2\,\omega^3\wedge\omega^1 + \mathbf{I}^3\,\omega^1\wedge\omega^2 \quad ; \quad \mathrm{d}\tau = \omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3.
$$

Introducendo (3) e (10) in (9) in seguito ai calcoli si ottengono le espressioni rispettive di questi operatori; abbiamo per esempio:

$$
(11)\quad \begin{cases}
\nabla\varphi = \varphi_{,j}\,\mathbf{I}^j \,,\ (\text{dove}\ d\varphi = \varphi_{,j}\,\omega^j) \quad ; \quad \operatorname{div}\mathbf{I}_1 = \dfrac{1}{\sin^2\theta}(r_2 - r_1\cos\theta) - q_3\,, \\
\operatorname{div}\mathbf{I}_2 = \dfrac{(r_2'\cos\theta - r_1')}{\sin^2\theta} + p_3 \quad ; \quad \operatorname{div}\mathbf{I}_3 = \dfrac{q_1 - p_2 + \cos\theta\,(p_1 - q_2)}{\sin^2\theta}\,, \\
\sin\theta\operatorname{rot}\mathbf{I}_1 = -\mathbf{I}_1(q_2 + r_3) + \mathbf{I}_2\,q_1 + \mathbf{I}_3\,r_1\,, \\
\sin\theta\operatorname{rot}\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1\,p_2 - \mathbf{I}_2(p_1 + r_3') + \mathbf{I}_3\,r_2'\,, \\
\sin\theta\operatorname{rot}\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1\,p_3 + \mathbf{I}_2\,q_3 - \mathbf{I}_3(p_1 + q_2)\,, \\
(\mathbf{I}_1\cdot\nabla)\,\mathbf{I}_1 = r_1\,\mathbf{I}^2 - q_1\,\mathbf{I}^3\,;\ (\mathbf{I}_2\cdot\nabla)\,\mathbf{I}_2 = p_2\,\mathbf{I}^3 - r_2'\,\mathbf{I}^1\,,\ (\mathbf{I}_3\cdot\nabla)\,\mathbf{I}_3 = q_3\,\mathbf{I}^1 - p_3\,\mathbf{I}^2.
\end{cases}
$$

Applicazione. Gli invarianti geometrici del campo $\mathbf{I}_3$ sono legati alle sue linee vettoriali, a varietà non olonoma ortogonale ed al suo complesso sostegno. Utilizzando gli operatori differenziali precedenti questi invarianti saranno:

$$
(12)\quad \begin{cases}
i_1 = -\mathbf{I}_3\cdot\operatorname{rot}\mathbf{I}_3 = \dfrac{p_1 + q_2}{\sin\theta} & \text{(la torsione della varietà non olonoma)} \\
i_2 = -\operatorname{div}\mathbf{I}_3 = \dfrac{p_2 - q_1 + \cos\theta\,(q_2 - p_1)}{\sin^2\theta} & \text{(la curvatura media della varietà non olonoma),} \\
i_3 = (\mathbf{I}_3\,,\boldsymbol{p}\,,\boldsymbol{q}) = p_1\,q_2 - p_2\,q_1 \quad (\text{dove}\ \boldsymbol{p} = p_j\mathbf{I}^j\,;\ \boldsymbol{q} = q_j\mathbf{I}^j) & \text{(la curvatura totale della varietà non olonoma),} \\
i_4 = [\mathbf{I}_3\,,\operatorname{rot}\mathbf{I}_3]^2 = \dfrac{p_3^2 + q_3^2 - 2\,p_3 q_3\cos\theta}{\sin^2\theta} & \text{(la curvatura della linea vettoriale del campo).}
\end{cases}
$$

Si usano anche gli invarianti:

$$
(13)\quad \begin{cases}
i_5 = [\mathbf{I}_3\,,[\mathbf{I}_3\,,\operatorname{rot}\mathbf{I}_3]]\cdot[\boldsymbol{p}\,,\boldsymbol{q}]\,, \\
-i_6 = [\mathbf{I}_3\,,\operatorname{rot}\mathbf{I}_3]\cdot[\boldsymbol{p}\,,\boldsymbol{q}]\,,
\end{cases}
$$

l'interpretazione dei quali è legata al complesso di rette sostegno del campo [6].

3. *Equazioni della magnetoidrodinamica.*

Le equazioni della MHD per un fluido ideale incompressibile sono:

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{H}\,,\boldsymbol{v}] = 0\,, \\
\operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \\
\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F} - \dfrac{\nabla p}{\rho_0} + \dfrac{\mu}{\rho_0}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\,,\mathbf{H}]\,, \\
\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0\,.
\end{cases}
$$

Qui: $\boldsymbol{v}$ – è la velocità; $\mathbf{H}$ – è l'intensità del campo magnetico; ρ_0 – è la densità costante del fluido; p – la sua pressione; μ – è la permeabilità magnetica;

$\mathbf{F} = \nabla \mathrm{U}$ – è la forza di natura non elettromagnetica che agisce su un'unità di massa la quale si suppone proveniente da un potenziale U.

Allora, scegliendo il riferimento in modo che:

$$\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_1 \quad ; \quad \mathbf{H} = \mathrm{H}\,\mathbf{I}_2 \,;$$

il sistema (I) diventa:

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} r'_t = v \sin^2\theta \,[p_3 + (\ln\alpha)_2]\,, \\ (\ln \mathrm{H})_t = -\dfrac{r'_t\cos\theta}{\sin^2\theta} - v\,[q_3 - (\ln\alpha)_1]\,, \qquad \text{dove } \alpha \equiv \mathrm{H}v\sin\theta \\ p_t = v\,(p_1 + q_2) \;\; ; \;\; (\ln \mathrm{H})_2 = -p_3 + \dfrac{(r'_1 - \cos\theta\, r'_2)}{\sin^2\theta}\,, \\ v\left[(\ln v)_t - \dfrac{r_t\cos\theta}{\sin^2\theta}\right] - \dfrac{v^2\cos\theta}{\sin^2\theta}\,[r_1 + (\ln v)_1\cos\theta - (\ln v)_2] + \\ \qquad + \dfrac{\mu\mathrm{H}^2}{\rho_0\sin^2\theta}\,[r'_2 + (\ln \mathrm{H})_1 - \cos\theta\,(\ln \mathrm{H})_2] + \mathrm{L}_1 = 0\,, \\ \dfrac{v r_t}{\sin^2\theta} + \dfrac{v^2}{\sin^2\theta}\,[r_1 + (\ln v)_1\cos\theta - (\ln v)_2] - \\ \qquad - \dfrac{\mu\mathrm{H}^2\cos\theta}{\rho_0\sin^2\theta}\,[r'_2 + (\ln \mathrm{H})_1 - \cos\theta\,(\ln \mathrm{H})_2] + \mathrm{L}_2 = 0\,, \\ v q_t + v^2\,[q_1 + (\ln v)_3] + \dfrac{\mu\mathrm{H}^2}{\rho_0}\,[p_2 - (\ln \mathrm{H})_3] + \mathrm{L}_3 = 0\,, \\ (\ln v)_1 = q_3 - \dfrac{1}{\sin^2\theta}\,(r_2 - r_1\cos\theta)\,. \qquad \text{dove } \mathrm{L} \equiv \dfrac{p}{\rho_0} - \mathrm{U} \end{cases}$$

Applicazione. Consideriamo il caso notevole nel quale il campo magnetico è ortogonale a $\boldsymbol{v}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. Allora per un moto in regime permanente il sistema (II) si riduce a:

$$(\mathrm{II}') \quad \begin{cases} (\ln v)_1 = q_3 - r_2 \;\; ; \;\; (\ln v)_2 = -r_1 \;\; ; \;\; (\ln \mathrm{H})_1 = r_2 \;\; ; \;\; (\ln \mathrm{H})_2 = r_1 - p_3\,, \\ p_1 + q_2 = 0 \;\; ; \;\; \dfrac{\mu\mathrm{H}^2}{\rho_0}\,2\,r_2 + \mathrm{L}_1 = 0 \;\; ; \;\; 2\,v^2 r_1 + \mathrm{L}_2 = 0\,, \\ v^2\,[q_1 + (\ln v)_3] + \dfrac{\mu\mathrm{H}^2}{\rho_0}\,[p_2 - (\ln \mathrm{H})_3] + \mathrm{L}_3 = 0\,, \end{cases}$$

ciò che in succinto si esprime mediante il sistema Pfaff:

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} p = p_1\,\omega^1 + p_2\,\omega^2 + p_3\,\omega^3 \;\; ; \;\; q = q_1\,\omega^1 - p_1\,\omega^2 + q_3\,\omega^3\,, \\ r = r_1\,\omega^1 + r_2\,\omega^2 + r_3\,\omega^3 \;\; ; \;\; d\,(\ln v) = (q_3 - r_2)\,\omega^1 - r_1\,\omega^2 + (\ln v)_3\,\omega^3\,, \\ d\,(\ln \mathrm{H}) = r_2\,\omega^1 + (r_1 - p_3)\,\omega^2 + (\ln \mathrm{H})_3\,\omega^3\,, \\ d\,(\ln \mathrm{L}) = -\dfrac{2\,\mu\mathrm{H}^2}{\rho_0}\,r_2\,\omega^1 - 2\,r_1 v^2\,\omega^2 - \\ \qquad - \{v^2\,[q_1 + (\ln v)_3] + (\mu\mathrm{H}^2/\rho_0)\,[p_2 - (\ln \mathrm{H})_3]\}\,\omega^3\,. \end{cases}$$

Si può dare immediatamente una risposta per ciò che riguarda l'esistenza delle soluzioni regolari e il loro grado di arbitrarietà. Il sistema (III) contiene $n = 3$ pfaffiani indipendenti, $s_0 = 6$ equazioni Pfaff e $N = 10$ funzioni incognite $(p_i, q_i, r_i, (\ln H)_3)$. Si determinano senza difficoltà i suoi caratteri $s_1 = 6$, $s_2 = 4$ e dunque il sistema è in involuzione e le sue soluzioni regolari dipenderanno da 4 funzioni a due argomenti.

Osservazione. La relazione (II'_5) $(p_1 + q_2 = 0)$ mostra che il piano dei campi fondamentali $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{H}$ inviluppa una famiglia unoparametrica di superfici. I gradienti superficiali $\operatorname{Grad} \ln v$ e $\operatorname{Grad} \ln H$ su questa superficie saranno:

$$\operatorname{Grad} \ln v = (q_3 - r_2)\, \mathbf{I}_1 - r_1\, \mathbf{I}_2 \quad ; \quad \operatorname{Grad} \ln H = r_2\, \mathbf{I}_1 + (r_1 - p_3)\, \mathbf{I}_2 .$$

Quindi essi possono essere caratterizzati solamente attraverso gli invarianti geometrici del campo delle normali $\mathbf{I}_3$ ad esse.

4. *Moti lenti nella magnetoidrodinamica.*

In MHD accanto al campo $\boldsymbol{v}$ interviene anche il campo magnetico $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \boldsymbol{h}$, dove $\mathbf{H}_0$ è il campo costante, iniziale e $\boldsymbol{h}$ — il campo indotto che deve essere determinato.

Definizione. Si chiama moto lento nella MHD un moto per mezzo del quale i due campi fondamentali $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{h}$ verificano le condizioni:

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = 0 \quad ; \quad [\operatorname{rot} \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}] = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot}\, [\boldsymbol{h}, \boldsymbol{v}] = 0 . \tag{14}$$

Questa definizione concorda con il concetto di un moto lento del prof. C. Agostinelli [2], [3], [4].

Scegliamo il riferimento semiortogonale così che:

$$\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_1 \quad ; \quad \boldsymbol{h} = h\mathbf{I}_2 . \tag{15}$$

Allora usando (11), (14_1) si ha:

$$q_1 = r_1 = v_1 = 0 . \tag{16}$$

Le prime due di esse mostrano che le linee di corrente sono rette e l'ultima mostra che il moto è isotacheo. La seconda condizione di (14), che esprime il fatto che il campo magnetico indotto $\boldsymbol{h}$ è elicoidale, tenendo conto di (11) diventa:

$$(\ln h)_3 = p_2 \quad ; \quad (\ln h)_2 \cos \theta - (\ln h)_1 = r'_2 . \tag{17}$$

In fine, l'ultima delle (14), per mezzo della (11) si trasforma nelle relazioni:

$$p_3 + [\ln (hv \sin \theta)]_2 = 0 \quad ; \quad q_3 - [\ln (hv \sin \theta)]_1 = 0 \quad ; \quad p_1 + q_2 = 0 . \tag{18}$$

(18_3) significa che il piano determinato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{h}$, a un momento dato, inviluppa una famiglia unoparametrica di superficie.

Se il fluido è ideale e incompressibile i moti lenti nella MHD ci condurranno nella seguente linearizzazione del sistema d'equazioni [2]:

$$
(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\mathbf{H}_0 , \boldsymbol{v}] = 0 , \\ & \operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0 , \\ & \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = - [\operatorname{rot} \boldsymbol{h} , \mathbf{H}_0] + \nabla \mathrm{L} , \\ & \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 . \end{aligned} \right. \qquad \mathrm{L} = - \frac{p}{\rho_0} + \mathrm{U}
$$

Scegliendo il triedro semiortogonale (15) e adoperando le espressioni degli operatori differenziali, queste equazioni, in seguito a calcoli laboriosi ci conducono a:

$$
(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & h_t \mathbf{I}_2 + h (p_t \mathbf{I}^3 - r'_t \mathbf{I}^1) = \mathbf{I}_1 (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla v) + v (\mathbf{H}_0 \cdot \boldsymbol{r}) \mathbf{I}^2 - v (\mathbf{H}_0 \cdot \boldsymbol{q}) \mathbf{I}^3 , \\ & (\ln h)_2 = - p_3 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (r'_1 - \cos \theta \, r'_2) , \\ & v_t \mathbf{I}_1 + v (r_t \mathbf{I}^2 - q_t \mathbf{I}^3) = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\sin \theta} (p_2 \cos \theta - p_1 - r_3) \, h \, [\mathbf{I}_2 , \mathbf{H}_0] - \nabla \mathrm{L} , \\ & (\ln v)_1 = q_3 - r_2 / \sin^2 \theta , \end{aligned} \right.
$$

alle quali si aggiungono le condizioni di linearizzazione (16)–(18). Se il moto lento è permanente, allora dalla (20_3) risultano immediatamente le condizioni: $(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla v) = (\mathbf{H}_0 \cdot \boldsymbol{r}) = (\mathbf{H}_0 \cdot \boldsymbol{q}) = 0$, ciò che va interpretato come un movimento che ha luogo nei piani paralleli alla direzione fissa $\mathbf{H}_0$; sempre di qui risulta anche la relazione notevole: $(\boldsymbol{q} , \boldsymbol{r} , \nabla v) = 0$, (dove $\boldsymbol{q} = q_j \mathbf{I}^j$ ecc.), l'interpretazione della quale è evidente.

Se applichiamo il rotore alla (20_1) avremo: $(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) (i\boldsymbol{h}) = 0$, dove $i = (p_2 \cos \theta - p_1 - r'_3) / \sin \theta$. Adoperando (8) questa relazione genererà l'identità:

$$
- \mathbf{I}^1 (\mathbf{H}_0 \cdot \boldsymbol{r}') + \mathbf{I}^2 (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla \ln (ih)) + \mathbf{I}^3 (\mathbf{H}_0 \cdot \boldsymbol{p}) = 0 ,
$$

oppure:

$$
(\mathbf{H}_0 \cdot \boldsymbol{p}) = 0 \quad ; \quad (\mathbf{H}_0 \cdot \boldsymbol{r}') = 0 \quad ; \quad (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla \ln (ih)) = 0 ,
$$

da dove, in particolare, si deduce: $(\boldsymbol{p} , \boldsymbol{r}', \nabla \ln (ih)) = 0$, che ha un'interpretazione analoga a quella di sopra.

Osservazioni. Dalle condizioni di linearizzazione (16)–(18) e dalle formule (20), oltre che dalla relazione finita tra gli invarianti geometrici (18_3), risultano ancora le seguenti: $r_2 = q_3 \sin^2 \theta$; $p_3 \cos \theta \sin^2 \theta + r_2 - r'_2 = 0$, e ugualmente la possibilità di valutare la grandezza del campo magnetico indotto data dalla formula:

$$
\nabla h = \frac{1}{v} \left(\boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{r}'}{\sin^2 \theta} , \boldsymbol{v} , \boldsymbol{h} \right) .
$$

In fine, osserviamo che il gradiente superficiale $\operatorname{Grad}\ln v$ è collineare a $\mathbf{I}^2$, precisamente:

$$\operatorname{Grad}\ln v = \frac{1}{\sin^2\theta}\,(2\cos\theta\, r'_2 - r'_1 + r_2)\,\mathbf{I}^2 .$$

Ritornando al caso generale dei moti lenti non stazionari, possiamo ricordare, senza riprodurre il sistema d'equazioni Pfaff al quale si riduce il nostro problema, che questo è in involuzione, e le sue soluzioni regolari dipendono tutt'al più da 6 funzioni a due argomenti.

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Ed. Cremonese, Roma 1966.
[2] C. AGOSTINELLI, *Moto lento stazionario magnetodinamico di un liquido viscoso elettricamente conduttore in un involucro sferico*, « Atti dei Lincei », *38*, 296–303 (1965).
[3] C. AGOSTINELLI, *Sulle formole integrali di Green in Magnetoidrodinamica*, « Atti dei Lincei », *40*, 523–530 (1966).
[4] C. AGOSTINELLI, *Su alcune formole integrali in Magnetoidrodinamica*, « Atti dei Lincei », *45*, 301–310 (1968).
[5] S. CHANDRASCKHAR, *On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics*, « Proc. Nat. Acad. of Sci. USA », *42*, 1 (1956).
[6] GH. GHEORGHIEV, *Despre geometria intrinsecă a unui cîmp de vectori*, « Stud. și cerc. șt. Acad. R.P.R. », Fil. Iași, T. II, 1–21 (1951).
[7] GH. GHEORGHIEV e M. IGNAT, *Su alcuni moti intrinseci notevoli nell'idrodinamica* (in corso di stampa).
[8] A. JEFFREY, *Magnetohydrodynamics*, Oliver and Boyd LTD (1966).